Tractatio Geometrica.

DE QVADRATVRA CIRCVLI, IN DECEM CAPITA DISTRIBVTA.

ADVERSVS ERRORES TAM VETErum, quam recentiorum mechanicorum.

Scripta a M. IACOBO CHRISTMANNO Ioannisbergenſi, inclytæ Academiæ Heidelbergenſis Profeſſore.

Coll. Rom. Societ. IESV.



FRANCOFVRTI,
Ex Officina Paltheniana, Sumtibus Petri Kopfij.

M. D. XCV.

Clariss.o et Excellentiss. Viro D. Christophoro Clauio, Mathematico peritiss.

CLARISSIMO VIRO, D. NICOLAO VIGNIERIO, CHRISTIANISSIMI REGIS GALLIARVM, Henrici IIII. Medico & Hiſtoriographo, amico obſeruando, Iacobus Chriſtmannus S.P.

QVANTO amore & humanitatis ſtudio, Vir Clariſſime, proſequaris eruditionis & diſciplinarum cultores, literæ tuæ non ita pridem ad me miſſæ, abunde teſtantur. Scribis enim, nihil te magis optare, & in votis habere, quàm vt amicitiam cum hominibus literatis ineas, eamq; mutuis officijs tuearis & perpetuo conſerues: qua in re facis, quod & Deus & natura omnibus faciendum præſcribit. Quod autem fructum aliquem amicitiæ noſtræ te percepiſſe prædicas, eſt cur mihi gratuler: quicquid enim per filium tuum Nicolaum, optimæ indolis ac ſpei adoleſcentem, de ſucceſsione Califarum Saracenicorum ad te tranſmiſi, id totum à te in Bibliothecam hiſtoricam relatum, & ſecunda editione Reipubl. communicandum eſſe accepi.

Utinam & mihi aliquando occaſio ſuppeditaretur, qua beneuolentiam & ſtudium meum erga te teſtificari poſſem: interea velim pro pignore amicitiæ noſtræ retineas Tractationem meam Geometricam de Quadratura circuli, iudicioq; tuo acerrimo ſubijcias, & quam diligentiſsimè examinandam proponas. Voluiſſem equidem libentius otium meum in rebus Chronologicis conſumere, nominiq; tuo celeberrimo materiam gratiorem conſecrare: ſed quia anguſtia temporis paſſa non eſt, vt longius euagarer, ſpero te munuſculum hoc mathematicum animo æquiſsimo ſuſcepturum, donec maiora & auribus tuis digniora proferre liceat. Diſputatio antiquiſsima eſt, & inter geometras plurimùm agitata, quomodo area circuli poſsit redigi ad æquale quadratum? etſi autem multi hoc artificium explicare ſint aggreſsi, nunquam tamen ſe penitus expedire potuerunt. Inuentus eſt nuper iactator quidam inſignis, qui auſus eſt ſcribere, omnes alios hactenus deceptos fuiſſe in quadrando circulo, ſe autem Quadraturam omnino ſcientifice demonſtraſſe: quod an verum ſit, iudicabunt harum rerum periti. Placet mihi ſententia Galeni

noſtri,

noſtri, in libro de curatione errorum animi expreſſa, hiſce verbis: οὐδὲν οὖν ἐστι θαυμαστὸν, ἐν ταῖς ἰδίαις ἕκαστον διατριβαῖς τοὺς φοιτητὰς ἀναπείθειν, ἐνίους μὲν ὀνώδεις φύσει, τινὰς δὲ δριμεῖς μὲν, ἀλλὰ ἀγυμνάστους ἐν τοῖς πρώτοις μαθήμασι. συμφέρει γὰρ οἶμαι διδασκάλοις ἀλαζόσι τοιούτους ἔχειν μαθητὰς, ὡς ὅ, τε συνετὸς φύσει καὶ προγεγυμνασμένος ἐν τοῖς μαθήμασιν, εὐθέως αὐτῶν καταφρονεῖ. *hoc eſt, nihil igitur mirum eſt, quemlibet in priuatis conuerſationibus ad ſe accedentes perſuaſione delinire: cum horum aliqui aſininam habeant naturam, aliqui vero acuti quidem ſint, ſed non exercitati in primis diſciplinis. Conuenit enim, opinor, doctoribus arrogantibus huiuſmodi habere diſcipulos, vt & is qui intelligens ex natura eſt, & is qui prius ſe in diſciplinis exercuit, ſtatim ipſos deſpiciat. In eodem libro hæc ſubiungit Galenus:* Τί ποτ' οὖν ἡ οὕτως αὐτῶν ὀξυδερκὴς ἐστιν ἡ ψυχὴ, καταγελαστότατοι πάντως εἰσὶν ἐν τοῖς τοιούτοις προβλήμασιν; ὧν ἡ εὕρεσις αὐτὴ μαρτυρεῖ τοῖς εὑρίσκουσιν ἀληθῶς αὐτά. τούτων γὰρ ἓν οὐδὲν οὐδέ ποτ' αὐτῶν εὑρεῖν ἠδυνήθη, ὅπου γε καὶ τῶν εὑρηκότων λεγόντων καὶ διδασκόντων, οἱ μὲν ἄλλοι μανθάνουσιν, ἐκεῖνοι δὲ μόνοι δι' ἀγυμνασίαν καὶ βραδυτῆτα ψυχῆς μὴ μανθάνουσιν, εἶτα παρακαλοῦσιν ἐμὲ, καί τις ἐξ αὐτῶν κατὰ τύχην παρακολουθήσειεν, ἀλλ' εἰπεῖν γε τὸ εἰρημένον οὐ δύναται. τίς οὖν μείζων τυφλότης, εἰς τὴν τῶν ἰδίων ἁμαρτημάτων γνῶσιν ἐστὶ τῆς τοιαύτης; τί δὲ τοιούτων; ὅταν ἄνθρωποι τῶν ἐπιτυγχανόντων αὐτοὺς ὁρῶντες ἀφυεστέρους, εἴς τε τὸ νοῆσαι καὶ μνημονεῦσαι, καὶ τὰ δι' ἀριθμητικῆς τε καὶ γεωμετρίας, ἀρχιτεκτονίας τε καὶ ἀστρονομίας εὑρισκόμενα, τὰ φιλοσοφίας εὑρηκέναι νομίζουσιν οὕτω ῥᾳδίως, ὡς ἀποφαίνεσθαι τολμᾶν αὐτὰ δεικνύ. καὶ τὰ πράγματα, χωρὶς ἀποδείξεως καὶ μεθόδου λογικῆς. ὅτι

δὲ ἑκόντες ἑαυτοὺς κολακεύουσιν, οὐκ ἀλήθειαν ζητοῦσιν, ἔνδει γνῶναι καὶ τοὺς κατά τινος ἕκαστον αὐτῶν ἀνατείνεσθαι παρὰ τοῖς φοιτηταῖς, ἅπαντάς τε διαβάλλουσι τοὺς ἄλλους ὡς ἐσφαλμένους. *Quæ verba cum ſcopo noſtro maxime ſint accommodata, tibi accuratius expendēda relinquo: arbitror etiam, te clauſulam Galenicam in prædicto libro optime notaſſe, quando ſic ſcribit,* ὁ ὑφ' ἑαυτοῦ κρινόμενός τε καὶ στεφανούμενος, ὑπὸ τῶν ἄλλων κριτῶν εἰ ὑπομείνειε δοκιμάζεσθαι, μηδὲ μιᾶς ψήφου μεταλαμβάνεται. *Cæterum Excellentiæ tuæ omnia fauſta a Deo Opt. Max. precor, & vt quam diutiſsime ſaluus & incolumis viuas opto. Heildelbergâ Kalendis Martijs, labente anno Chriſti 1595 die primo menſis Niſan feria ſeptima, currente anno æræ Iudaicæ 5355. pridie neomeniæ menſis Regab, obrepente anno Hegiræ milleſimo tertio.*

SVM-

SVMMA CAPITVM, QVÆ IN HAC TRACTATIONE Geometrica continentur.

Capite 1. proponitur ſcopus auctoris.
Capite 2. adducuntur opiniones veterum Geometrarum, Antiphontis, Hippocratis Chij, & Bryſonis, quæ etiam ordine refutantur.
Capite 3. explicatur modus quadrandi circulum ab Archimede inuentus.
Capite 4. oſtenditur, quibus fundamentis nitatur quadratura circuli, a Ioſepho Scaligero excogitata.
Capite 5 ſoluuntur obiectiones & paralogiſmi Ioſephi Scaligeri.
Capite 6. confirmatur ſententia Ariſtotelis, quod impoſsibile ſit circulum quadrari.
Capite 7. declaratur propoſitio penultima libri primi elementorum Euclidis.
Capite 8. docetur, quid ſentiendum ſit de epharmoſi geometrica, vnde applicatio curui ad rectum fluxiſſe videtur.
Capite 9. monſtratur, quid de proportione recti ad curuum ſentiendum ſit.
Capite 10. affertur Epilogus tractationis de quadratura circuli.

Tractatio Geometrica.

DE

QVADRATVRA CIRCVLI,

IN DECEM CAPITA DISTRIBVTA,

Auctore M. Iacobo Chriſtmanno Ioanniſbergenſi.

Quis ſit ſcopus auctori propoſitus?

CAPVT I.

QVÆSITVM fuit inter veteres, an area circuli in figuram quadratam conformari poſſit, ita vt ambo ſpatia ſibi inuicem prorſus ſint æqualia? Occaſio huius quæſtionis inde nata eſt: cum omni figuræ rectilineæ conſtitui queat ęquale quadratum, ſicut ex libro 1. & 2. elementorum Euclidis demonſtratur, haud alienum ab inſtituto Geometriæ eſſe videtur, ſi etiam inueſtigetur, an omni circulo æquale quadratum dari poſſit: ex hoc enim artificio inuento, maximum emolumentum rebus mathematicis acceſſurum eſſet. Quod intelligimus ex commen-

mentario Procli,in propoſitionem 45 libri primi Euclidis,vbi ſic ait, *Ex hoc problemate, opinor inducti veteres,etiam circuli quadraturam quæſiuerunt: ſi enim parallelogrammum æquale reperitur omni rectilineo, non indignum eſt ſciſcitari,an quoque rectilinea circularibus æqualia dari poßint.* Sane diu multumq; a varijs artificibus laboratum eſt, vt quadratura circuli inueniretur, hoc eſt,vt certa ratio monſtraretur, qua ſpatium circulare cum quadrato exæquari poſſet: ſed nunquam votis ipſorum reſpondit euentus. Cum enim certam rationem ſe inueniſſe arbitrarentur, vtique in multas abſurditates paulatim inciderunt, vt principia Geometriæ labefactare, & ſuis hypotheſibus contraria ſtatuere cogerentur. Quod expreſſe teſtatur Simplicius lib. ſeptimo Phyſicorum, contextu 21. quando ſic ſcribit, καὶ διὰ τοῦτο οὐδὲ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς ἤυρητό πω: εἰ γὰρ νῦν δὲ καὶ δοκῇ ηὑρῆσθαι, ἀλλὰ μετά τιων ὑποθέσεων ἀντιλεγομένων, hoc eſt, & propter hoc neque circuli quadratura inuenta eſt adhuc: etſi enim nunc inuenta eſſe videatur, inuenta tamen eſt cum quibuſdam hypotheſibus contradicentibus. Veruntamen non omnium conatus ſimpliciter damnandus eſt:conſtat enim vtiliſſimum inuentum eſſe Archimedis, quod licet ſummam præciſionem minime attingat, proximam tamen æquationem ſubminiſtrat. Tolerandi igitur ſunt huiuſmodi artifices, qui circuli quadraturam, ex rationibus mechanicis conſtructam, ſenſibus aliquo vſq; ſatisfacere

ingenue profitentur: qui autem putant, rationem demonſtratiuam ad circulum quadrandum afferri poſſe, næ illi Logices & Geometriæ ſunt imperiti: quemadmodum in ſubſequentibus euidenter oſtendemus. Propterea recte ſenſit Ariſtoteles, quando negauit circuli quadraturam perfici ex principiis geometricis: etſi enim circulus mechanice quadrari poſſit, vt ſenſui oculorum ſatisfactum eſſe videatur, huiuſmodi tamen quadratio ſophiſtica eſt, cum non fiat ſecundum rem. Locus hic exſtat lib. 1. Elenchorum cap. 10. vbi ita ſcribitur, εἰ καὶ τετραγωνίζεται ὁ κύκλος, ἀλλ' ὅτι οὐ κατὰ τὸ πρᾶγμα, διὰ τοῦτο σοφιστικὸς (τετραγωνισμός.) Similis locus reperitur apud Porphyrium in quæſtionibus prædicamentorũ, vbi teſtatur, tempore Ariſtotelis nondum inuentam fuiſſe quadrationem circuli, aut ſi maxime inuenta fuiſſet, eam tamen non eſſe apodicticam. Verba eius ita habent: μή ποτε οὖν ὀργανική τις εὕρεσις ἐγένετο τοῦ θεωρήματος, ἢ εἰ καὶ εὕρηται, ἀλλ' οὐκ ἀποδεικτική. Idem ſentit Ammonius in prædicamento Relatorum, quando ſic ſcribit, Οἱ οὖν γεωμέτραι ζητοῦσι τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, πενταγώνῳ εἰ τύχοι ὄντι, πῶς δυνατὸν ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. καὶ γοῦν μεθόδῳ τοῦτο ἐδίδαξαι, ὥσπερ οὖν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων ἐζήτησαν, ζητοῦσι καὶ ἐπὶ τοῦ κύκλου, πῶς δυνατὸν τῷ δοθέντι κύκλῳ ἴσον τετράγωνον εὑρεῖν. τοῦτο δὲ πολλοὶ ζητήσαντες, οὐχ εὗρον. Μόνος δὲ Ἀρχιμήδης τὸ σύνεγγυς ἀνεῦρε: τὸ μέντοι ἀκριβὲς, οὐχ εὗρε. hoc eſt, Geometræ igitur quærunt dato rectilineo, vt ſi forte eſſet pentagonum, quomodo illi æquale quadratum conſtitui poſſit: & certe methodo hoc docuerunt. Quemadmodum igitur in recti-

ctilineis quæſiuerunt, ita etiam in circulo quærunt, quomodo dato circulo æquale quadratum liceat inuenire. hoc autem multi quærentes non inuenerunt. Veruntamen ſolus Archimedes quod proximum eſt inuenit, at accurate non inuenit. Cur autem nonnulli Ariſtotelem ſuſpectum habeant, quaſi falſum de omni quadratura circuli aſſeruerit: eo nomine, quod nunc multis ſeculis poſt Archimedem ſit inuenta certa demonſtratio, ex qua circulus perfectiſſime & abſolutiſſime quadrari poſſit: in cauſa eſt, quod neſciant diſtinguere inter demonſtrationem, quæ aliter habere nequit, & inter ſyllogiſmum abductionis. Ariſtoteles enim lib. 2. Priorum, cap. 25. oſtendit, eos qui circulum quadrare cupiunt, abduci a demonſtratione, quatenus propoſitas ſuperficies non poſſunt dicere eſſe ęquales, ſed eſſe fere æquales, quandoquidem ita ſenſui oculorum videtur. Proinde ait, huiuſmodi probationes minime apodicticas, quin potius ſyllogiſmos abductionis, appellandas eſſe: non enim in demonſtrationibus admittimus propoſitiones, in quibus dicitur, quantitates eſſe fere æquales, ſed tales propoſitiones aſſumimus, in quibus dicitur, quantitates eſſe omnino æquales. At in ſyllogiſmis abductionis nihil impedit, quominus ponamus, quantitates eſſe fere æquales: hic enim non exactam quærimus ſcientiam, ſed eam tantũ, quæ verum proxime aſſequatur. Quod manifeſte teſtatur Ariſtoteles hiſce verbis, cum inquit loco citato,

τὸ μετὰ μηνίσκων ἴσον γίνεσθαι εὐθυγράμμῳ τὸν κύκλον, ἐγγὺς ἂν εἴη τοῦ εἰδέναι, hoc eſt, per meniſcos circulum æquare poſſumus rectilineo, vt propemodũ ſcientiam aſſequamur. Ex quo conſpicitur, hos parum verſatos eſſe in lectione Philoſophi noſtri, qui imperitioribus perſuadere conantur, quadraturam circuli non abhorrere a placitis Ariſtotelis, & ſummorum eius interpretum. Inſignem etiam iniuriam faciunt ſummo artifici Archimedi, qui putant ipſum coactas & tyrannicas rationes per impoſſibile ducentes, ad inueſtigationem quadraturæ circuli adhibuiſſe. Nec minus delirant, qui nouũ quendam circuli quadrandi modum, plenis buccis decantant, eundemq; ſeſquipedalibus verbis effuſe laudatum, ac figuris geometricis vndique ſtipatum, in theatrum producunt: ſed demonſtrationi geometricę non opus eſt phaleris, & veritas ſimplex eſt. Quam ob rem paucis exponere decreui, quid de quadratura circuli ex fundamentis geometrię ſentiendum ſit, vt manifeſtũ fiat, in quo hactenus omnes aberrarint, & quæ cauſæ impediant, quo minus circulus quadrari poſſit.

Adducuntur opiniones veterum Geometrarum, Antiphontis, Hippocratis Chij, & Bryſonis, quæ etiam ordine refutantur.

CAPVT II.

EX ſcriptis Ariſtotelis apparet, tres fuiſſe artifices, qui quadraturam circuli inueſtigare conabantur: quo-

quorum nomina hæc ſunt, Bryſo, Antiphon, & Hippocrates Chius. Bryſonis meminit Philoſophus libro primo poſteriorum Analyticorum, contextu 67. & libro primo Elenchorum ſophiſticorum, cap. 10. Antiphontis mentionem facit libro primo Phyſicorum, contextu 11. & lib. 1. Elench. cap. 10. Hippocratis Chii quadraturam attingit eodem in loco Elenchorum, vbi etiam Bryſonis & Antiphontis rationes examinat. Quod ad contextum vndecimum primi Phyſicorum attinet, in eo hæc ſcribuntur, *Simul vero nec omnia* (*ſophiſmata*) *diluere conuenit, ſed ea tantum, quæcunque ex principijs quis demonſtrans falſo concludit: quæcunque vero non* (*ſic concludit,*) *veluti quadraturam quidem illam, quæ per ſegmenta fit, Geometræ eſt diluere: illam vero Antiphontis* (*diluere,*) *Geometræ non eſt.* Hinc manifeſte apparet, quadraturam Antiphontis plane ruſticam & ineptam fuiſſe: quod non aſſumeret principia ex geometria, ſed oculari quadam oſtenſione contenta eſſet. Vt ſi quis perimetrum circuli per impoſitionem fili metiretur, & deinde filo eodem in quatuor partes æquales diducto, quadratam ſuperficiem deſcriberet. Sane huiuſmodi ineptias velle diſſoluere, non eſt geometræ: immo nec cum hoc contendendum eſſet, qui geometriæ principia prorſus euerteret, ſtatuendo æquales ambitus linearum continere æquales areas, quemadmodũ imperite credidiſſe videtur Antiphon. de quo in Elenchis ſic Ariſtoteles, ἢ ὡς Ἀντιφῶν ἐτετραγώ-

νίζειν: quaſi diceret, aut ſi quis ita inepte circulum velit quadrare, vt fecit Antiphon. De quo hoc memorabile obſeruandum eſt, quod iudicium aurigarum & carpentariorum ſecutus, putauerit lineam rectam cũ circumferentia menſurari poſſe: quam ſane dimenſionis rationem appellauit ἐφάρμοσιν. Teſtis huius rei eſt Philoponus, qui in contextum 67 lib. primi poſteriorum Analyticorum ſic ſcribit: ἀλλ' οὐκ ἐκ τῶν τῆς γεωμετρίας οἰκείων ἀρχῶν ἐστὶν ἡ ἀπόδειξις. τοῦτο δέ φασι καὶ Ἀντιφῶντα πεποιηκέναι, γραμμὴν εὐθεῖαν ἐφαρμόσαντα τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ὡς ἐκεῖνος ἔλεγεν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. hoc eſt, Sed non ex propriis geometriæ principiis eſt demonſtratio. Hoc vero aiunt etiam Antiphõtem feciſſe, qui lineam rectam adaptauit circuli circumferentiæ, vt ipſe loqui ſolebat: quod eſt impoſſibile. Etſi autem iſta ἐφάρμοσις, ſeu applicatio lineæ rectæ ad curuam, quacunque fiat ratione, accepta referatur Antiphonti, ſciendum tamen eſt, omnes mechanicos eodem artificio olim vſos, & hodie quoque vti. Quare non immerito tanquã ἀγεωμέτρητοι reiiciendi ſunt atq; explodendi, qui huiuſmodi ineptias, cum geometria pugnantes, defendunt. Qui autem conantur circulum quadrare per principia geometrica, cum ſic quadrari nequeat, illi omnino digni ſunt, qui a Geometra refutentur. Ex horum numero fuit Bryſo & Hippocrates Chius, ſicut teſtatur Ariſtoteles in Elenchis: quando ſic ſcribit: οὐδέγε, εἴ τί ἐστι ψευδογράφημα, περὶ ἀληθὲς: οἷον τὸ Ἱπποκράτους, καὶ ὁ τετραγωνισμὸς ὁ διὰ τῶν μηνίσκων

νίσκων, ἀλλ' ὡς ὁ Βρύσων ἐτετραγώνιζε τὸν κύκλον. id eſt, neque profecto, ſi ſit aliquod pſeudographema, circa veram demonſtrationem, ſtatim litigioſum erit, qualis eſt Hippocratis quadratio, quæ per lunulas (ſiue per ſegmenta) conficitur: ſed tunc erit litigioſum pſeudographema, ſi fiat vt Bryſo quadrauit circulum. Notãdum hic eſt, ad particulam οὐδὲν ſubaudiendum, litigioſum erit, quemadmodum recte interpretatur Alexander: id ipſum intelligitur ex verbis Ariſtotelis poſt paucas lineas conſequentibus: vbi ait: οἷον ὁ τετραγωνισμὸς, ὁ μὲν διὰ τῶν μηνίσκων, οὐκ ἐριστικὸς, ὁ δὲ Βρύσωνος ἐριστικό. Licet igitur ambo artifices, Bryſo & Hippocrates Chius, circulum quadrare voluerint ex principiis geometricis, eorum tamen rationes inter ſe multum diſcreparunt: nam Bryſonis quadratura fuit contentioſa, quia geometricis admiſcuit communia principia: Hippocratis autem non fuit litigioſa, quia propria quidem geometrię principia, ſed male intellecta adhibuit. Poſt hæc dicta videndum erit, an poſſimus indicare trium horum artificum modos, quos in quadrando circulo excogitarunt: ſane Ariſtoteles hoc ſpeciatim non expoſuit, quia hi modi fere omnibus ſatis erãt perſpecti: hoc tantum inculcauit, has inuentiones mere ſophiſticas fuiſſe, quod non aſſequerentur ſummam præciſionem, quæ in geometricis demõſtrationibus requiritur. Quare ſi de modis harum inuentionum aliquid ſcire cupiamus, conſulendi nobis ſunt interpretes. In-

ter hos ſummæ auctoritatis eſt Simplicius, qui primo Phyſicorum, ad contextum vndecimum, diligentiſſime examinat rationes Antiphontis & Hippocratis Chij: cum de his duobus ibi loqui videatur Philoſophus: de Antiphonte nullum eſt dubium, ſiquidem hic expreſſe nominatur: an vero quadratura per ſegmēta inueſtigata, referenda ſit ad Hippocratem, ſatis ambigitur. Quod enim Hippocrates circulum quadrauerit per lunulas, in Elenchis ſophiſticis non obſcure indicat Ariſtoteles, an vero huic ſimilis ſit quadratura per ſegmenta, non conſtat. Simplicius exiſtimat quadrationem per lunulas, eandem eſſe cum ea, quæ fit per ſegmenta, quando ait: τὸν δὲ διὰ τῶν τμημάτων φησὶ τετραγωνισμὸν γεωμετρικοῦ διαλύειν ἐστί. λέγοι δὲ ἂν τὸν διὰ τῶν τμημάτων, τὸν διὰ τῶν μηνίσκων ὃν Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐφεῦρε. κύκλου γὰρ τμῆμα ὁ μηνίσκος ἐστί, id eſt, Quadraturam autem per ſegmenta factam, ait, geometrę eſt diſſoluere: nam per quadrationem, quæ fit per ſegmenta, poteſt intelligere quadrationem, quæ fit per lunulas, quam Hippocrates Chius inuenit. circuli enim ſegmentum lunula eſt. In fine tamen commētarij refert Simplicius, lunulas improprie dici ſegmenta: ac proinde quadrationem per ſegmenta poſſumus ſeparare ab ea, quæ fit per lunulas. Audiamus etiam, quomodo hunc contextum exponat Themiſtius, qui ſic ſcribit in paraphraſi primi Phyſicorum: εἰ μὲν οὖν τηροῦντες τὰς ἀρχὰς ἐν τοῖς ἑξῆς τι παρελογίζοντο, ἀκόλουθον ἦν ἐπιδεικνύναι τῷ φυσικῷ πῇ φενακίζουσιν.

ζουσιν. εἰ δὲ δι᾽ ὧν παρακρούονται, τὰς αὐτὰς ἀρχὰς ἀναιροῦσι, οὐκ οἰκεῖον τὸ λύειν τοὺς λόγους αὐτῶν, τοῦ μετιόντος τὴν ἐπιστήμην. ἐπεὶ καὶ τὰ ψευδογραφήματα, ὅσα μὲν σώζει τὰς γεωμετρικὰς ὑποθέσεις, λυτέον τῷ γεωμέτρῃ: ὅσα δὲ μάχεται πρὸς ἐκείνας, παραιτητέον. οἷον, δύο τινὲς κύκλον ἐπεχείρησαν τετραγωνίζειν, Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν. τὸν μὲν οὖν Ἱπποκράτους λυτέον: τὰς γὰρ ἀρχὰς φυλάττων, παραλογίζεται, τῷ μόνον μὲν ἐκεῖνον τὸν μηνίσκον τετραγωνίσαι, ὃς γράφεται περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν, τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου: πάντα δὲ μηνίσκον οἷον τε τετραγωνίζειν, λαβεῖν εἰς ἀπόδειξιν. πρὸς Ἀντιφῶντα δὲ, οὐκ ἔτι ἂν ἔχοι λέγειν ὁ γεωμέτρης, ὃς ἐγγράφων τρίγωνον ἰσόπλευρον εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν πλευρῶν ἕτερον ἰσοσκελὲς συνιστὰς πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς ποιῶν, ᾤετο ποτὲ ἐφαρμόζειν τοῦ τελευταίου τριγώνου τὴν πλευρὰν εὐθεῖαν οὖσαν τῇ περιφερείᾳ. τοῦτο δὲ ἦν τὴν ἐπ᾽ ἄπειρον τομὴν ἀναιροῦντος, ἣν ὑπόθεσιν ὁ γεωμέτρης λαμβάνει hoc eſt, quãdo igitur obſeruantes principia, in ſubſequentib. errorem aliquẽ committunt, phyſici eſt oſtendere, vbi fallantur. Si vero etiam principia tollãt eorum, per quæ decipiuntur, vtique inueſtigantis ſcientiam proprium officium non eſt, vt rationes ipſorũ diſſoluat. Quoniam & pſeudographemata, quæcunq; ſeruant geometricas hypotheſes, diſſoluenda ſunt a geometra, quæcunque vero cum il'is pugnant, hęc relinquenda ſunt. Vt, duo quidam circulum quadrare conati ſunt, nimirũ Hippocrates Chius & Antiphon. Quadratio igitur Hippocratis ſoluenda eſt, quia ſeruans principia, paralogiſmum committit, dum eum ſolum meniſcum quadrat, qui deſcribitur circulatus quadrati, in circulo inſcripti: & tamẽ ſumit ad demonſtrationem, quaſi omnis meniſcus poſſit quadrari. Sed

aduerſus Antiphontem non amplius pugnabit Geometra: is enim circulo inſcribebat triangulum iſopleurum, & in quouis latere aliud iſoſceles conſtituebat ad circumferentiam circuli: quod cum aliquoties feciſſet, exiſtimabat vltimi trianguli latus vtpote lineam rectã congruere ad circumferentiam. Hoc autem erat ſectionem in infinitum tollere, quam tamen Geometra pro hypotheſi ponit. Hæc Themiſtius. Dignum etiam obſeruatione eſt, quod de Hippocrate Chius ſcribit Magentinus in expoſitione capitis 25. libri ſecundi priorum Analyticorum: quando inquit, ἐπειράσαντο μὲν πολλοὶ τετραγωνίσαι τὸν κύκλον, οὐκ ἠδυνήθησαν δέ. ὁ δὲ Ἱπποκράτης ἔδοξε μὲν τετραγωνίσαι τοῦτον, τῇ δὲ ἀληθείᾳ οὐκ ἐτετραγώνισεν. Ὁ Ἱπποκράτης ναύκληρος ὤν, καὶ λῃστευθεὶς τὴν ναῦν, συλλαβόμενος τοὺς λῃστὰς, ἀπήνεγκεν Ἀθήνησι, δώσοντας δίκην: κατὰ τύχην δὲ ἐνέτυχε γεωμέτρῃ, καὶ ἔρον ἔσχε γεωμετρίαν μαθεῖν, καὶ μαθὼν ταύτην, καὶ τῶν ἀπόρων ἐψηφίσατο ζητημάτων. hoc eſt, tentarunt quidem multi quadrare circulum, ſed non potuerunt. Hippocrates autem viſus eſt quadraſſe hunc, ſed in veritate nõ quadrauit. Hippocrates iſte nauclerus erat, qui cum in piratas incidiſſet, merces naui impoſitas amiſit: poſtea compreheñſos piratas, Athenas abduxit, vt ibi pœnam luerent. Sed per fortunã incidit in geometram, & ſtudio diſcendi geometriam flagrauit, quam vbi didiciſſet, etiam quæſtiones inexplicabiles ſoluere conatus eſt. Hæc de Hippocrate Chio Magentinus retulit: de Bryſone autem & Antiphonte ex hiſtoriis nihil certi inuenire potuimus. Etſi autem Antiphontis quadratura

tura omnium fuerit ineptiſſima, vt nulla refutatione egere videatur ex ſententia Ariſtotelis: quia tamē modum eius Simplicius & Themiſtius deſcribunt, nos eũ quoque conſiderandum proponemus. Cenſebat Antiphon, circulum quadrari poſſe, ſi illius ſuperficies in triangulos rectilineos ſecaretur, atque ex his omnibus quadrata radix extraheretur, quemadmodum id fieri poteſt per propoſitionem vltimam libri ſecundi Euclidis, monente Campano, his verbis: *Et nota quod per hoc inuenitur latus tetragonicum cuiuſlibet altera parte longioris & ſimpliciter omnis figuræ, rectis lineis contentæ, quæcunque fuerit. Quoniam omnē figuram talem in triangulos reſoluemus, & cuiuſlibet illorum triangulorum inueniemus tetragonicum latus, ſecundum doctrinam iſtius. Et inueniemus per penultimam primi lineam vnam, quæ poßit in omnia latera tetragonica inuēta.* Sed propoſitum Antiphontis facile deſtruitur: non enim ſuperficies tota circularis poteſt in triãgulos rectilineos diſpeſti: adhæc circumferentię partes ad rectas lineas nō poſſunt congruere, quia punctum etiam minimum circumferentiæ curuum eſt, & ad lineam rectam applicari nequit. Simili modo decipiũtur, qui per rotationis epharmoſin volunt lineam rectam cum circumferētia comparare: hi enim ponunt, ſingula puncta lineæ curuæ poſſe applicari ſingulis punctis lineæ rectæ, quod abſurdũ eſt, & tollit ſectionem cōtinui in infinitum, vt ſuo loco prolixius dicemus. In idem abſurdum incidunt, qui

per lineas quadratrices circumferentiam diuidunt: hi enim neceſſario multas partes in circumferentia circuli præterire coguntur, quod eas non percipiat ſenſus: & cum quælibet pars circumferētię curua exſiſtat, fieri poteſt, vt in minimo puncto circumferentię, ſegmentum circuli lateat: ſi autem aliquod ſegmētum circuli vel omittatur, vel ad triangulum nequeat reuocari, non poteſt tota area circuli in quadratum con formari. Atq; hactenus ſatis de epharmoſi Antiphontis dictum eſt: nunc videamus reliquorum artificum modos. Hippocrates Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus, elegans quidem principium geometriæ vſurpabat, per id tamen non poterat circulum quadrare. Oſtendebat enim ex propoſitione ſecunda libri duodecimi Euclidis: quemadmodum inter ſe ha berēt diametrorum quadrata, ita inter ſe affectos eſſe circulos & ſemicirculos: proinde recte colligebat, ſi duo circuli haberent duplam proportionem in quadratis diametrorum, circulum minorem ęqualem eſſe ſemicirculo maiori, & quadrantem circuli maioris æqualem eſſe ſemicirculo minori, ablatoque communi ſegmento, reſiduum meniſcum fieri æqualem reſiduo triangulo iſoſceli & orthogonio. Hoc inuento putabat idem Hippocrates circulum quadrari poſſe: cum enim duæ diuerſiſſimæ figurę, nimirum meniſcus ſiue lunula, & triangulum orthogonium iſoſceles, poſſint fieri æqualia & quadrato, circulari areæ inſcripto, poſ-

ſint

ſint aſſignari quatuor meniſci æquales, quid impedit, quo minus totus circulus ad quadrati figuram reduci poſſit? ita quidem ratiocinabatur Hippocrates, nunquam tamen oſtendere poterat, totam ſuperficiem circuli in meniſcos certos diuidi poſſe, qui eſſet æquales alicui quadrato habenti æqualem aream cum circulo. Deceptus igitur fuit Hippocrates, quod exiſtimaret, ſi vnus meniſcus poſſet triangulo æquari, atq; hac ratione ad quadratam figuram reduci, quod etiã omnis meniſcus hanc haberet facultatem: quemadmodum Simplicius indicat hiſce verbis: καί ἐστι μὲν εὐφυὴς ἡ ἐπιχείρησις: τὸ δὲ ψευδογράφημα γέγονε, παρὰ τὸ μὴ καθόλου δεδειγμένον ὡς καθόλου λαβεῖν. οὐ γὰρ ἐδείχθη πᾶς μηνίσκος τετραγωνιζόμενος, ἀλλ᾽ ὁ περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευράν, τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου. Ad hæc ſi maxime concedamus, omni meniſco poſſe æquale triangulum conſtitui, inde tamen non ſequitur, aream circuli cum ſuperficie quadrati accurate exæquari, niſi prius oſtendatur, omni circulo poſſe dari æqualem meniſcum: ſed hoc nunquã probabitur. Eadem ratio eſt quadrationis per ſegmenta: niſi enim oſtendi poſſit, omni ſegmento circuli dari ęquale triangulum, nullo modo monſtrabitur, aream circularem per certa ſegmenta diſtributam, æqualem fieri alicui quadrato. Quæ fuerit ratio à Bryſone obſeruata in quadrando circulo, exponunt interpretes ad contextum 67 libri primi poſteriorum Analyticorum: Bryſo enim quadratum dato circulo partim in-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

ſcripſit, partim circumſcripſit, ita vt quatuor ſpatia angularia quadrati, extra circulum extuberãtia, ſumerentur æqualia quatuor ſegmentis eiuſdem circuli, extra quadratum prominentibus. Sic autem eſt argumentatus: cui poteſt dari maius & minus quadratum, eidẽ poteſt dari æquale quadratum, at circulo poteſt dari maius & minus quadratum, Ergo circulo poteſt dari æquale quadratum. Maiorem propoſitionem putabat eſſe poſtulatum mechanicum: minorem autem probabat per diuiſionem ſpatiorum extuberantium, quæ inter ſe æqualia viderentur, ſenſu nullam differentiam animaduertente. Hic aiũt interpretes, maiorem propoſitionem non eſſe vniuerſaliter veram: non enim omni, cui poteſt dari maius & minus, poteſt aſſignari æquale: quia æqualitas affectio ſit eorum, quæ ſunt eiuſdem generis & naturæ, vt inter ſe comparari queant. Hoc probant per angulos rectilineos & contingentiæ, qui inter ſe æquari nequeunt: nam angulus contingentiæ minor eſt omni rectilineo, vt oſtendit Euclides libro tertio elemẽtorum propoſ. 15. Et Campanus ibidem ſcribit, angulum rectilineum non poſſe fieri æqualem angulo contingentię, qui à recta & curua linea intercipitur. Et paulò pòſt addit hæc: *Ex hoc notandum, quod non valet iſta argumentatio, hoc tranſit à minori ad maius, & per omnia media, Ergo per æquale. Nec iſta, contingit reperire maius hoc & minus eodem, Ergo contingit reperire æquale.* Et princeps Geometrarum

rum Euclides libro tertio elementorum, propoſ. 30. demonſtrat, angulum ſegmenti ſemicirculo maioris, eſſe angulo recto maiorem: angulum vero ſegmenti ſemicirculo minoris, eſſe angulo recto minorē. Hinc tamē non ſequitur, quòd angulus ſemicirculi, qui medius eſt inter angulum ſegmentorum, æqualis ſit recto: nam per propoſ. 15. libri 3. Euclidis, demonſtratur angulum ſemicirculi omnium quidem angulorum acutorum eſſe ampliſſimū, non tamē rectum. Et Campanus fideliſſimus Euclidis interpres, eandem ſententiam repetit ad propoſ. 30. lib. 3. elem. Euclidis, cum ſic ait, *Tranſitur igitur à minori ad maius, non per æquale. Et ſicut in rectilineis angulis, eſt reperire maiorem angulo ſemicirculi,* (qui à diametro & circumferentia efficitur,) *& minorem, non tamen æqualem, vt monſtratum eſt in 15. huius. Sic in angulis portionis* (id eſt ſegmenti,) *eſt reperire maiorem recto & minorem, non tamen æqualem, vt patet ex iſta demonſtratione.* Idem Campanus ad propoſitionem primam libri decimi Euclidis, ſic ſcribit, *Sed hi non ſunt vniuocè anguli: non enim eiuſdem ſunt generis ſimpliciter curuum & rectum:* & paulo poſt addit, *Planum ergo eſt, etiam quemlibet angulum rectilineum infinitis angulis contingentiæ eſſe maiorem.* Hinc liquet, angulum rectum maiorem quidem eſſe angulo ſemicirculi, non tamen multo maiorem: quia angulus ſemicirculi non differt à recto, niſi in puncto contingentiæ, teſte Campano. Sed hic obiiciat aliquis, quomodo igi-

tur angulus contingentiæ poſſit diuidi, ſiquidem per lineam rectam ſecari nequeat? vt oſtendit Euclides in propoſ.15.lib.3.cum tamẽ neceſſe ſit eum diuidi, quatenus eſt pars ſuperficiei: ſuperficies enim & omne continuum in infinitũ diuidi poteſt. Reſpondendum eſt, angulum contingentiæ diuidi perimetris circulorũ quantitate differentibus: ſic enim diuiditur à quantitate eiuſdem generis. Huc ſpectat, quod refert Simplicius ad cõtextum vndecimum primi Phyſicorum, ſe ſubinde cum præceptore ſuo Ammonio diſputaſſe de proportione numerorum & magnitudinis, item de proportione curui & recti: ſed Ammonium ſtrenue negaſſe, quod in omnibus eadem ſit proportio. Verba Simplicii hæc ſunt. ἔλεγε δὲ ὁ ἡμέτερος καθηγεμὼν Ἀμμώνιος, ὡς οὐκ ἀναγκαῖον ἴσως, εἰ ἐπ᾽ ἀριθμῶν εὑρέθη τοῦτο, καὶ ἐπὶ μεγεθῶν εὑρίσκεσθαι. ἀνομοιογενῆ γὰρ μεγέθη ἐστὶν, εὐθεῖα, καὶ περιφέρεια. καὶ οὐδὲν φησὶ θαυμαστὸν, μὴ εὑρεθῆναι κύκλῳ εὐθύγραμμον ἴσον, εἴπερ καὶ ἐπὶ τῶν γωνιῶν εὑρίσκομεν τοῦτο. οὔτε γὰρ τῇ τοῦ ἡμικυκλίου γωνίᾳ, οὔτε τῇ λοιπῇ εἰς τὴν ὀρθὴν, τῇ κερατοειδεῖ λεγομένῃ, γένοιτο ἂν εὐθύγραμμος ἴση γωνία. καὶ διὰ τοῦτο ἴσως φησὶ καὶ ὑπὸ οὕτω κλεινῶν ἀνδρῶν ζητηθὲν θεώρημα, ἄχρι νῦν οὐχ εὑρέθη, οὐδὲ ὑπ᾽ αὐτοῦ Ἀρχιμήδους. hoc eſt, Dicebat autem noſter præceptor Ammonius, quod non neceſſarium fortaſſis eſſet, ſi in numero inueniatur hoc, etiam in magnitudinibus inueniri. ſunt enim diuerſi generis magnitudines, recta, & circumferẽtia, & nihil, ait, mirum eſt, non inueniri circulo rectilineũ æquale: ſiquidem etiam in angulis hoc deprehendimus: neque enim angulo ſemicirculi, neq; reliquo ad rectam

rectam lineam inſiſtenti, qui cornicularis appellatur, dari poteſt æqualis angulus rectilineus: atq; propterea fortaſſis, ait, etiam a valde præclaris viris theorema tale quæſitum, vſque ad hoc tempus nondum inuentum eſt, ne quidem ab ipſo Archimede. In eandem ſen tẽtiam deſcẽdit Philoponus libro primo poſteriorum Analyticorum, cõtextu 67. vbi ait, verum quidem eſſe axioma in iis, quæ eiuſdem ſunt generis, quod id, quod neq; maius, neq; minus aliquo probetur, eidem æquale habeatur: ſed in illis, quæ ſunt diuerſi generis, opus eſſe limitatione: etſi enim per omnia non poſſint conferri, quæ ſunt diuerſi generis, ea tamẽ in aliquibus admittere comparationem. Et Themiſtius ſcribit libro 1. Poſteriorum, ſyllogiſmum Bryſonis niti vago & communi principio, quod neque ad circulum, neq; ad magnitudinem ſit accommodatum: proinde huiuſmodi ſyllogiſmum nequaquam dici poſſe demõſtratiuum. Conſtat ergo maiorem propoſitionem, qua vſus fuit Bryſo, non eſſe ſimpliciter veram: ad minorem autem reſponderi poteſt per diſtinctionem: poteſt enim circulo dari maius & minus quadratum, in quãtitatibus diuerſi generis: ſed inde non ſequitur, quod poſſit dari æquale: æqualitas enim eſt in vniuocis: ſola autem vniuoca ſunt comparabilia, vt Campanus teſtatur ad tertiam definitionem libri quinti Euclidis. Idem loco citato ſentit Simplicius, vbi vult angulum rectilineum, & illũ, qui ex curua & recta generatur, diuerſi eſſe ge-

neris, vt inter vtrumq; comparatio nulla inſtitui poſſit. Verba eius hæc ſunt, αἱ μὲν τοι γωνίαι, αἵ τε τῶν ἡμικυκλίων, καὶ αἱ κερατοειδεῖς, ἐκ περιφερείας καὶ εὐθείας ἄμφω συγκείμεναι, οὐ μόνον ἀνομοιογενεῖς εἰσι τῇ εὐθυγράμμῳ, ἀλλὰ καὶ ἀσύμβλητοι. Veruntamen ſciendum eſt, ſi argumentum Bryſonis ex principiis mechanicis æſtimemus, in eo nihil deſiderari: etſi enim linea recta ad curuam, & curua ad rectam applicari nequeat ex principiis geometriæ, tamen modo mechanico applicari poteſt. Quare ſic inquit Simplicius libro 1. Phyſicorum, contextu 11. ἄμεινον οὖν εἶναι ἀρχὴν λέγειν, τὸ ἀδύνατον εἶναι εὐθείαν ἐφαρμόσαι περιφερείᾳ. hoc eſt, melius igitur eſt dicere, principium eſſe, quod impoſſibile ſit, rectam lineam applicare circumferētię. Hoc ſcilicet impoſſibile eſt ex fundamentis geometriæ, fieri tamen poteſt mechanice: vt enim lineam rectam per regulam ſiue circinum & ſextantem metimur, ſic etiā lineam rectam poſſumus ad circumferētiam applicare, ſi vtamur filo æneo, aut regula flexibili: & contra, circumferentiam per æneum filum comprehenſam, poſſumus iterum diducere, & rectæ lineæ ęquare. Admittitur igitur a mechanicis hoc poſtulatū, quod cuicunque lineæ poſſimus maiorem & minorem dare, eidem etiam valeamus æqualem aſſignare, ſiue lineæ rectæ, ſiue curuæ conſiderentur. Præterea a mechanicis æquales ſuperficies recipiūtur, in quibus ſenſus nullam notabilem deprehendunt differentiam: adhæc licet mechanicis per certos numeros linearum omniū

inter-

interualla comprehendere, etiamſi non omnes lineæ in longitudine ſint commenſurabiles. Quod ſi igitur iuxta hæc mechanica principia circulum quadrare velimus, nulla plane erit difficultas: vt autem certam ex geometria demonſtrationem habeamus, qua perfectiſſimam circuli quadrandi ſcientiam conſequamur, non eſt cur multum laboremus. Quotquot enim circulum exactiſſime quadrare conantur, hi omnes paralogiſmum Bryſonis reuocare coguntur: aduerſus quos non erit opus nouis argumentis & rationibus pugnare. Hoc tantum requiritur, vt diligenter videamus, quem modum quadrationis & veteres & recentiores mechanici ſint ſecuti, & quam longe a ſubtilitate geometrica aberrarint: cuius rei methodum nos in ſequentibus luculenter & perſpicue oſtendemus.

Explicatur modus quadrandi circulum, ab Archimede inuentus.

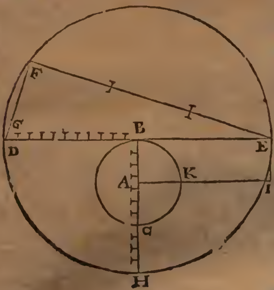
CAPVT III.

POſtquam vidit Archimedes, multos quidē de quadratura circuli laboraſſe, ſed parum commodi ad praxin exercēdam attuliſſe: operam omnino dare voluit, vt quantum fieri poſſet, haberetur ratio facilis, & ad opificia mechanica opportuna. Quare duo in dimenſione circuli ante omnia inueſtigāda eſſe monuit: quorum primum eſt, vt menſura aliqua communis

inter diametrum circuli & eiuſdem circumferentiam inueniretur: ſecundum eſt, vt capacitas areæ circularis cum ſpatio paralellogrammi rectilinei exæquaretur. Hæc autem eo animo non propoſuit, quaſi inter rectum & curuum certa proportio, ex principiis geometriæ confirmata, dari poſſet: hoc enim impoſſibile eſſe, ſolertiſſimus & diligentiſſimus artifex probe intellexit: ſed hoc indicare voluit, finem contemplationis de quadratura circuli, eſſe vſum, cuius præſidio machinas fabricari, & alia multa opera ad vitam noſtram vtilia efficere poſſimus: proinde hunc contemplationis finē conſequuti acquieſcimus, etiamſi modus quadrationis non ſit demonſtratiuus, vt per omnia reſpondeat principiis geometriæ. Reſtat igitur, vt videamus, quo artificio Archimedes indagauerit proportionem, ſeu proximam menſuram inter diametrum circuli, & inter eius circumferentiam. Primo quidem etiam ipſe Archimedes poſtulatum Antiphōtis ſecutus eſt, dum voluit, lineam rectam cum circumferentia per epharmoſin æquari poſſe: ſi nimirum accipiatur rota aut orbis mobilis, qui a certo puncto in rectum circumuoluatur, donec ad idem punctum, vnde moueri cœpit, reuertatur. Quod cum factum fuerit, cenſuit Archimedes, lineam rectam æqualem datæ circumferentiæ in ſuperficiem planam extenſam eſſe: & vt maxime æqualitas iſta ex geometria probari nō poſſit, hoc tamen putauit ſufficere ſcopo mechanico, quod ex iu-

dicio oculorum,ob factam diligentem circumreuolutionem,æquales lineæ deprehendantur. Hoc poſito, accepit Archimedes circulum quadrãdum, cuius diametro ad angulos rectos incumbentem lineam contingentiæ adſcripſit, quæ in longitudine æquaret circumferentiam, ſicut ex epharmoſi rotationis deprehenſum erat: deinde ex hac linea contingentiæ, quæ adæquata fuit longitudini perimetri,fecit diametrum maioris circuli:ex diametro autem circuli quadrandi, & ex triplo eiuſdem diametri conſtruxit duo latera, quæ angulum rectum efficerent in circumferẽtia circuli maioris,ita vt diametrus circuli maioris eſſet hypotenuſa trianguli orthogonij in ſemicirculo maiore conſtituti. Poſtea circino excepit latus maius trianguli,& illi æqualem portionem abſcidit ex diametro maioris circuli,ſiue ex hypotenuſa, quæ per epharmoſin æqualis ponebatur circumferentiæ circuli quadrandi: reſiduam autem portionẽ ex diametro maiore, oſtendit eſſe fere partem ſeptimam diametri circuli quadrãdi,quod iterum per epharmoſin patuit. Hinc concluſit Archimedes, non incommode totam diametrum maiorem,hoc eſt,circumferentiam circuli quadrandi, in tales partes viginti duas ſecari poſſe, qualium ſeptẽ ponitur diameter circuli quadrandi. Ex quo probauit, proportionem diametri cuiuſque circuli ad ſuam circumferentiam eſſe triplam cum vna fere ſeptima parte. Hinc eſt,quod Alfraganus ſcribat, perimetrum cir-

culi ter contineri in diametro, cum vna ſeptima diametri parte: quam ſententiam omnes fere practici hactenus ſunt ſecuti, vt ex ſequentibus manifeſte apparebit. Quia autem hæc ſine diagrammate percipi nequeunt, operæpretium facturi ſumus, ſi delineationẽ aliquam ſtudioſis geometriæ ob oculos ponamus, & ex ea mentem Archimedis explicemus, quemadmodum practici ſentiunt.



Eſto circulus quadrandus B K C. cuius centrum eſt A. Si igitur a puncto B. dimidia circumferentia reuoluatur in lineam rectam B E. & in lineã rectam B D. apparebit totam circumferẽtiam æqualem eſſe lateri ſubtenſo D E. Diuidatur ſemidiameter D B maioris circuli in partes vndecim æquales, & totidem partium ſit linea B H. Diameter autem circuli quadrandi huiuſmodi partes habebit ſeptem, & ſemidiametrus eiuſdẽ erit partium $3\frac{1}{2}$. Latus D F æquale ponatur diametro circuli quadrandi: id autem paulo maius erit, quam ſit latus decagonum circu-

circulo maiori inſcriptum. Linea F E ponatur triplo maior, quam ſit latus D F. continebit igitur hæc linea F E partes viginti vnã. Tandem ex diametro maioris circuli D E, abſcindatur per circinum linea E G. quæ ęqualis ſit lineæ F E. Quare hæc quoque linea E G. erit partium 21. relictum igitur ſupplementum D G. cõtinebit vnam fere partem, qualium ſeptem eſt diameter circuli quadrandi. Quare tota diametrus maioris circuli continebit partes fere viginti duas. Conſtitutum igitur eſt triangulum orthogonium in ſemicirculo D F E. quare angulus ad circumferentiam rectus eſt, per propoſ.30.lib.3. Euclidis. Vt autem de inuento Archimedis iudicium ferre poſſimus, nobis inſpicienda erit propoſitio penultima libri primi elementorum Euclidis: in qua explicatur proprietas trianguli orthogonii, qui magiſter eſt matheſeos, & acerrimus vindex omnium abſurdorum mechanicorum. Hæc eſt proprietas trianguli orthogonii, quod quadratum ſubtenſe, æquale ſit duobus quadratis, quæ à reliquis laterib. deſcribuntur. Si igitur ponamus trianguli in ſemicirculo deſcripti, latera rectum angulum amplectentia, ita inter ſe eſſe comparata, vt minus latus ſit ſeptẽ partium, maius autem contineat triplum, videlicet partes viginti vnam: certe quadratum lateris minoris erit 49. & maioris 441 quæ ſimul ſumta efficiunt 490. quod eſt quadratum ſubtenſæ, ſeu maximi lateris. Radix igitur de quadrato 490. eſt quantitas ſubtenſæ: quia vero

hic numerus non eſt quadratus,ex eo quoque non niſi proxima radix extrahitur, quam Archimedes ſumſit partium 22. ex quadrato ſcilicet proximo 484. Quid ergo opus eſt,vt tam indigne in Archimedem nonnulli inuehantur, quaſi multum hallucinatus ſit in oſtendenda proportione diametri ad ſuam circumferentiã: non enim hoc inuentum iactat Archimedes pro vera demonſtratione,ſiquidem aperte profitetur,hanc eſſe proximam proportionem, ex principiis mechanicis deſumtã. Obiicitur ab Ariſtarchis, ſubtenſam eſſe radicem ſurdam de quadrato 490.itaque conuenientius fore, vt dicamus, longitudinem perimetri æqualem eſſe Radici quadrati illius, quod decuplũ ſit quadrati a diametro deſcripti. Verum Archimedes vſui mechanico conſulere voluit, proinde Radicem proximam extrahendam eſſe iudicauit. Adhæc ſi maxime demõſtrationem aliquam geometricam iactare voluiſſet, & dixiſſet,quadratum a diametro deſcriptum & decuplatum exhibere Radicem, cuius longitudo æqualis ſit perimetro:nemo tamẽ credidiſſet, hãc eſſe demonſtrationem,cum eius probatio ex ſola epharmoſi pendeat. Habemus igitur,quid Archimedes princeps mechanicorum ſentiat de proportione inter diametrum & eius circumferentiam: ſi enim diametrus in ſeptem partes æquales diuidatur,& tales viginti duæ partes æquales in lineam rectam extendantur, hanc vtique lineam rectam partibus viginti duabus conſtantem dicit re-

cit reſpondere circumferentiæ circuli. Quomodo autem area ſiue capacitas circuli eruenda ſit, vt parallelogrammo alicui rectangulo altera parte longiori, aut triangulo alicui rectangulo æqualis videatur, ac per conſequens ad æquale quadratum reduci debeat, nűc erit conſiderandum. Sane Archimedes voluit, parallelogrammon altera parte longius, quod fit ex ductu lineæ viginti duarum partium, in ſemidiametrum $3\frac{1}{2}$ partiű, duplum eſſe circuli: ſeu quod idẽ eſt, iudicauit triangulum rectãgulum, cuius latera rectum angulű amplectẽtia ita ſe habeant, quemadmodű affecta ſunt 22 ad $3\frac{1}{2}$. æquale eſſe areę circulari: ſeu quod idem eſt, cenſuit, parallelogrammum altera parte longius, quod fit ex ductu lineæ vndecim partium, in ſemidiametrű $3\frac{1}{2}$ partium, æquale eſſe areæ circulari. Vt ſi 22 multiplicentur per $3\frac{1}{2}$. producitur area parallelogrammi 77. quod eſt duplum capacitatis circuli: ergo dimidiű parallelogrammi eſt $38\frac{1}{2}$. Sed & triangulum rectangulum, cuius latus vnum circa rectum angulum eſt $3\frac{1}{2}$ partium, & alterum eſt 22 partium, cőtinet aream, $38\frac{1}{2}$. Præterea ſi accipiatur parallelogrammum altera parte longius, cuius maius latus ſit vndecim partium, & minus latus ſit $3\frac{1}{2}$ partium: & hæc duo latera in ſe multiplicentur, producitur area $38\frac{1}{2}$. quæ æqualis habetur circulo, cuius diameter ponitur ſeptem partiű, & perimetrus æſtimatur viginti duarum partium. Idẽ confirmat Simplicius in commentario poſtremi con-

textus, libri ſecundi de cœlo, vbi ſic ait, δείκνυται ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἡ τοῦ κύκλου περίμετρος τριπλάσιος τῆς διαμέτρου, καὶ ἐπὶ ἑβδόμῳ μέρει αὐτῆς ὑπερβάλλουσα. & paulo poſt, δείκνυται δ᾽ αὖθις τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ τετάρτου μέρους τῆς περιμέτρου ἴσον τῷ τοῦ κύκλου ἐμβαδῷ. Vbi Simplicius etiam alium modũ inueſtigandæ areę circularis, iuxta inuentum Archimedis, proponit: vult enim diametrum circuli multiplicandam eſſe in quartam partem perimetri, atq; ſic produci parallelogrammum, quod ſit æquale circulo. Hic modus elegans eſt, & cum ſuperiore omnino cógruit: ſicut examen numerorum oſtendit. Quod hæc fuerit ſententia Archimedis, non tantũ ipſius arguunt demonſtrationes, verum etiam multi præclari viri, inuentum Archimedis in ſummo pretio habentes, abunde teſtati ſunt. Scribit enim Proclus in propoſitionem 45 libri primi elementorũ Euclidis, hæc verba: καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν, ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. hoc eſt, Et Archimedes demóſtrauit, quod omnis circulus æqualis ſit triágulo rectangulo, cuius vnũ latus eorũ, quę angulũ rectum amplectuntur, ſit ęquale ſemidiametro, alterum autem latus rationem baſeos habens ſit ęquale perimetro. Philoponus quoque in contextum 67. libri primi poſteriorum Analyticorum hæc ſcribit. Μόνος δὲ ὁ Ἀρχιμήδης δοκεῖ τοῦτο ἐπιτυχεῖν, ὥς ὁ Θέων ἐν τῷ πρώτῳ τῶν τῆς συντάξεως ὑπομνημάτων φησὶν ἐκθεὶς τήν τε ἀπόδειξιν, καὶ τὴν τοῦ σχήματος καταγραφήν, ἐν ᾗ δείκνυται τὸ ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διπλάσιον εἶναι τοῦ κύκλου.

κύκλου. δείκνυται δὲ τοῦτο διὰ τῆς εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. τουτέστιν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου, καὶ ἐκ τῆς τοῦ κέντρου, οὔτε μεῖζον δύναται εἶναι, οὔτε ἔλασσον. ὡς καὶ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων, πολλὰ τῶν ἐκεῖσε θεωρημάτων δείκνυται, διὰ τῆς τοιαύτης ἀποδείξεως. hoc eſt, Solus vero Archimedes videtur hoc attigiſſe, quemadmodũ Theon refert in primo commentario ſupra Syntaxin (Ptolomæi) exponens & demõſtrationem & figurę deſcriptionẽ, in qua oſtẽditur, parallelogrammum factum ex perimetro circuli, & ex ſemidiametro, duplum eſſe circuli. monſtratur autem hoc per deductionem ad impoſſibile, hoc eſt, quod parallelogrammum ex dimidia perimetro circuli, & ex ſemidiametro, neque maius poſſit eſſe, neque minus circulo. Vt etiam in duodecimo elementorum (Euclidis) multa theoremata ibi propoſita, oſtenduntur per huiuſmodi demonſtrationem. Locus Theonis, à Philopono citatus, exſtat libro primo commentariorum in magnam cõſtructionem Ptolomæi, pagina 12. editionis Græcæ Baſilienſis: & nondum habemus commẽtaria iſta Theonis in latinam linguam tranſlata. Sic ait Theon: ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αβγ κύκλου, τῆς ηβ (ἐκ κέντρου,) διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης ἔδειξεν, οὗ καὶ τὴν δεῖξιν ἑξῆς ἐκθεσόμεθα. Et paulo poſt, τούτου προληφθέντος, ἑξῆς ἂν εἴη τὸ προκείμενον δεῖξαι, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ κύκλου. hoc eſt. Sed quod a perimetro circuli *a b c*. & ſemidiametro *e b*. deſcribitur parallelogrammum, duplum eſt areæ circularis, vt Archimedes oſtendit, cuius etiam oſten-

ſionem deinceps exponemus. Et paulo poſt, hoc prius aſſumto, deinceps propoſitum oſtendendũ erit, quod parallelogrammum a perimetro circuli & ſemidiametro productum, duplum ſit eiuſdem circuli. Hactenus Theon. Qui autem videre cupit, quomodo per impoſſibile demóſtret Theon, parallelogrammum illud nec maius nec minus eſſe, ac proinde æquale: videat illa, quæ in cómentario Theonis ſequuntur: hæc enim fruſtra a nobis adducerentur. Sed aduertẽdum eſt, deductionem illam Theonis ad abſurdum, non recte comparari cum geometricis rationibus ad abſurdum deducentibus: nam geometrarum demonſtrationes ſunt certiſſimæ, quare etiam abſurda contra eas allata vim habent maximam. ſic autem non ſunt affectæ omnes demonſtrationes mechanicæ: nam pleræque ex incertis pendent principiis, vt ſi contrarium ſentiẽtes per impoſſibile deducere coneris, nullum reperias auxilium: talis eſt probatio, qua Archimedes oſtendere conatur, parallelogrammum a dimidia perimetro, & ſemidiametro comprehenſum, æquale eſſe areæ circulari. Si enim hoc per demonſtrationem geometricam euincere cupiamus, oportebit oſtendere, in iſto parallelogrammo contineri quatuor quadrãtes circuli propoſiti: & poſſumus quidem tres quadrantes circuli in ſpatio iſtius parallelogrammi iuxta ſe collocare, ſed tres relinquentur portiones parallelogrammi, quæ ſimul ſumtæ nulla ratione æquales quarto quadranti

demon-

demonſtrari poſſunt. Si epharmoſin mechanicam, & iudicium oculorum conſulamus, dicemus portiones relictas nec multo maiores, nec multo minores eſſe quarto quadrante circuli: vt autem exactam dimenſionem habeamus, hoc omnino fieri nequit. Quare recte ſcribit Auerroes ſupra contextum 67. libri primi Poſteriorum, ſic inquiens, *Propoſitio autem, qua vſus eſt Bryſo, eſt propoſitio dicens, quod ea, quæ ſunt maiora vno in diſpoſitione ipſius, & minora vno, ſunt æqualia. Sed hæc propoſitio eſt amplior, quam vt eam faciant Geometræ, & eſt etiam non vera, quoniam non eſt appropriata magnitudinibus. & maius & minus in magnitudinibus ſphæricis & rectis, non dicuntur ſecundum diſpoſitionem vnam: hoc eſt, quoniam non dicitur, quod circulus maior ſit ſuperficie: immo non eſt proportionalitas ſecundum veritatem inter lineam rectam & circularem. Maxime autem hac propoſitione vtuntur Geometræ, cum monſtrant, quod menſura circuli conſtituitur ex ductu dimidiatæ diametri in dimidium circumferentiæ: in eo quod monſtratur, quod res, quæ eſt ſecundum hanc diſpoſitionem, eſt minor omni ſuperficie, quæ eſt extra circulum, & maior omni ſuperficie, quæ fit intra circulum: igitur ſuperficies, quæ conſtituitur ex ductu dimidiatæ diametri in dimidium circumferentiæ, eſt æqualis circulo, quoniã ipſa & circulus ſunt minores vno eodem in diſpoſitione ſua, hoc eſt omni ſuperficie, quæ efficitur extra circulũ: & ſunt etiam maiores vno eodem in diſpoſitione ſua, hoc eſt omni ſuperficie, quæ efficitur intra circulum.*

Vult dicere Auerroes, quod mechanici decipiantur, qui putant parallelogrammum a dimidia perimetro, & ſemidiametro comprehenſum, æquale eſſe areæ circulari: non enim ſequitur, ſi circulo poſſit dari maius & minus parallelogrammum, quod oporteat etiam æquale dari: adhæc ſi maxime concederetur, poſſe dari circulo æquale parallelogrammum, nondum tamen probatum eſſet, id tale eſſe, quod fiat ex ductu dimidię perimetri in ſemidiametrum: quod ſi autem certo demonſtrari nequeat, hoc parallelogrammũ eſſe circulo æquale, neque etiam quadratum huic parallelogrammo æquale factum, dici poteſt æquale circulo. Qui igitur circulum quadrare cupiunt, ſic ratiocinantur, ſi datur parallelogrammum altera parte longius, quod ſit æquale circulo, datur etiam quadratum æquale circulo: at datur parallelogrammum altera parte lõgius, quod ſit æquale circulo, Ergo datur etiam quadratum circulo æquale. Hypotheſis eſt certiſſima, quia omni figuræ rectilineæ, ſiue ſit triangulum, ſiue parallelogrammum altera parte longius, poteſt cõſtitui æquale quadratum, per propoſitionem vltimam, libri ſecundi elementorum Euclidis. At minor propoſitio opus habet inductione, hoc eſt, aſſumtione particulari: qui autem eam probare conantur, non inducunt, ſed abducunt, ponẽtes ſcilicet id fere æquale eſſe, quod omnino æquale eſſe debuit: vt eleganter oſtendit Ariſtoteles in cap. 25. libri ſecundi Priorum. Etſi autem nec ipſe Archi-

Archimedes oſtendere potuerit parallelogrammũ altera parte longius, quod æquale eſſet circulo: attamẽ rem maximi momenti inueniſſe creditur, quod latera iſtius parallelogrammi vtcunque circulo æqualis, iiſdẽ partibus definiuerit: hoc enim ad praxin mechanicam perutile eſt. Quare non immerito reprehendẽdi ſunt, qui ab Archimedis inuento temere diſcedũt, finguntque parallelogrammum aliquod altera parte longius, cuius latus vnum ſit ſurdum, & alterum certo numero definiatur. Quorum ſane figmenta nihil conferunt ad vſum mechanicum: quin etiam horum auctores nunquam probare poſſunt, quomodo datum parallelogrammum altera parte longius, ex fundamentis geometricis æquale detur circulo propoſito: de qua re prolixius dicemus in ſequentibus. Hæc igitur eſt ſententia Archimedis de proportione inter diametrum & circumferentiam, & de quadratura circuli, vt vulgus practicorum exiſtimat.

Oſtenditur quibus fundamentis nitatur quadratura circuli a Ioſepho Scaligero excogitata.

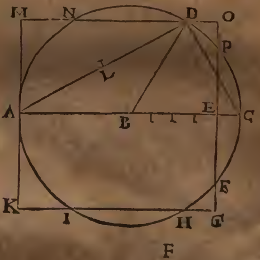
Capvt IV.

Editus eſt liber nomine Cyclometricorum elementorũ: cuius auctor in eos mirifice debacchatur, qui putant impoſſibilem eſſe quadraturam circuli: & aſſe-

rit, priſcorum quidem omnium rationes ſophiſticas fuiſſe, teſte Ariſtotele, ſe autem κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον nouam quadraturam circuli demonſtraſſe. Quin etiã tanta eſt in homine iſto audacia, vt non vereatur dicere, nouos eſſe quadrationis circuli hoſtes, qui quod ab antiquis fieri non potuit, ab aliis deſperandum eſſe cenſeant: ſed hos, cum ita ſentiant, neq; vt Geometras pronuntiare, neque vt Dialecticos colligere. Accedit huc, quod iſtorum Cyclometricorum auctor tanta animi ægritudine laboret, vt dicat pernitioſum hoc genus hominum, χθὲς καὶ πρώην εἰς τοὺς ἀνθρώπους ἐπεισφθαρῆναι. Quare opportunum fuerit, ſi nouum hũc quadrationis modum diligenter examinemus, & ad lapidem Lydiũ reuocemus, quo ſtudioſi animaduertant, nondum penitus exſtinctam eſſe omnem geometriã, ſed illam Dei beneficio nobis tectam ſartamq; remanſiſſe, a qua certiſſima argumenta petere poſſimus, quibus falſæ hypotheſes non modo veterum, ſed etiam recentiorum mechanicorum euertantur. Etſi autem cõfuſum ſit chaos propoſitionum, quibus figmenta noua cyclometrica inuoluũtur, vt vix dignoſcere queamus, quam ſententiam conceperit Scaliger de quadrando circulo: nos tamen cõſiderato quodam corollario, ad paginam 80 propoſito, ex conſequentibus antecedentia intelleximus. Idcirco nobis placuit, vt in typo geometrico hunc modum quadrationis exhiberemus, & quid de eo ſentiendum eſſet, perſpicue oſtenderemus.

Corol-

Corollarium Scaligeri ſic habet: *Ex his patet, circuli aream eſſe æqualem rectangulo ſub latere trianguli æquilateri in eo ipſo inſcripti circulo, & nouem decimis diametri concepto.* Vult igitur Scaliger, circulum propoſitum hoc modo quadrãdum eſſe, vt diametrus circuli quadrandi diuidatur in decem partes æquales, vt eidem circulo inſcribatur latus trianguli ęquilateri: quo facto dicit, nouem decimas diametri accipiendas pro vno latere, eaſque cum latere trianguli æquilateri ad angulum rectum copulandas, vt per multiplicationem lateris vnius in alterum, parallelogrammum rectangulũ & altera parte longius generetur: atq; hoc rectangulũ altera parte longius vult æquale eſſe areæ circulari. Deinde huic rectangulo altera parte longiori æquale quadratum deſcribit, per propoſitionem vltimam libri ſecundi elementorum Euclidis: atque hac ratione oſtendit, propoſito circulo ęquale quadratũ aſſignatũ eſſe. Vt autem appareat, hunc quadrationis modũ ad abſurditatem Bryſonis recidere, & nihil minus quã propoſitũ demõſtrare: ecce proponam typum, ex quo omnia fient manifeſta.



Sit circulus quadrandus, cuius centrum eſt B. & diametrus eſt A C. diuiſa in decem partes æquales, vt ſemidiametrus contineat partes quinque. Huic circulo inſcribatur latus trianguli iſopleuri, quod ſit A D. id autem inſcribitur iuxta propoſitionem 2. lib. 4. Euclidis. Quo facto, neceſſe eſt, vt ſupra ſemidiametrũ B C conſtituatur triangulum iſopleurum, ſi puncta D & C. item D & B in rectum coniungantur, vt colligitur ex propoſitione 8. lib. 13. Euclidis, ſecundum Campanum. Vnde liquet latus D C eſſe ęquale lateri B C, ſiue ſemidiametro circuli quadrandi. Cum autē latus D C ſit æquale ſemidiametro, neceſſe eſt, vt ſit latus hexagonum circulo inſcriptum: per prop. 15. lib. 4. Euclidis. Latus A D diuidatur per ęqualia in puncto L. & huius lateris dimidium ęquale ſit lateri E G. ſiue A K. Comprehendamus igitur parallelogrammum rectāgulum a latere A E, conſtante nouem decimis diametri, & a latere A K, quod eſt dimidiũ lateris trianguli iſopleuri circulo inſcripti. Si quis iam dicat, parallelogrammum iſtud æquale eſſe ſemicirculo, vt id probet, omnino neceſſarium eſt. Hoc enim probato conſequetur, quod parallelogrammum a nouem decimis, & toto latere trianguli iſopleuri circulo inſcripti comprehenſum, æquale ſit toti circulo. HIC RHODVS HIC SALTVS. HOC OPVS HIC LABOR. Sed qua methodo Scaliger conatur propoſitum ſuum adſtruere? quæ probanda erant, intacta relinquit, & in pro-

in propoſitionibus nihil ad ſcopum facientibus prolixe immoratur. Explicat proportionem, quam habeant latera iſta circulo inſcripta & adſcripta: hoc autem nihil facit ad propoſitum. Addit, quod diametrus ad perimetrum ſiue circumferentiã, hanc habeat proportionem, ſi perimetrus in planũ extẽdatur, & ex ea fiat ſubtenſa trianguli rectanguli, cuius vnum latus circa angulum rectum ſe habeat in tripla proportione, ad alterum latus, tunc quadratum lateris minoris fore decuplum quadrati, quod ex ſubtenſa procreatur, & nonuplum quadrati, quod ex latere maiore deſcribitur: neque hoc quicquam facit ad propoſitum. Omitto reliquam farraginem hinc inde conſutã, qua fundamenta quadraturæ circuli nouus iſte Archimedis cenſor explicare nititur. Quis enim ita imperitus geometriæ eſt, vt ignoret, iſtis parergis nunquam propoſitum obtineri? ſi typus noſter inſpiciatur, facile deprehendetur, vbi fucus & cauſa erroris lateat: niſi enim demonſtrari poſſit, parallelogrammum A E G K. æquale eſſe ſemicirculo A J H C. nihil vnquam efficietur. Jmmo ſi parallelogrammum iſtud duplicetur, vt eius dimidiũ vergat in alterum ſemicirculũ A N D C. & non poſſit oſtendi, quod totum parallelogrammũ comprehenſum ex latere conſtante nouem decimis diametri, & ex latere trianguli iſopleuri circulo inſcripti, manifeſte principium petetur. Quomodo autem demõſtrabitur, parallelogrammum A E G K, æquale

eſſe ſemicirculo A J H C. aut parallelogrammum A M O E, æquale eſſe ſemicirculo A N D C. niſi ratio mechanica Bryſonis obſeruetur? vnumquodq; enim parallelogrammum in duabus partibus excedit ſemicirculum, & ſemicirculus in duabus partibus excedit parallelogrammum: quare ſi mõſtrari poſſet, exceſſus vtrinque eſſe æquales, facile probaretur æqualitas parallelogrammi & ſemicirculi: quod autẽ exceſſus ſint æquales, hoc per ſolam applicationem mechanicam deprehendi poteſt. Eadem ratio erit, ſi concipiatur parallelogrammum ex nouem decimis diametri, & ex latere trianguli iſopleuri circulo inſcripti: tunc enim integrum parallelogrammũ K M O G. a toto circulo in tribus partibus excedetur, & viciſſim ipſum totum parallelogrammum in quatuor partibus circulum excedet: ac proinde nihil de æqualitate exceſſuum ſtatui poteſt, niſi in auxiliũ adhibeatur epharmoſis mechanica, qua etiam Bryſo monſtrabat quadratum fieri æquale circulo. Ex quibus manifeſtum eſt, modũ quadrandi circuli, a Scaligero excogitatum, nec eſſe, nec dici poſſe demonſtratiuum: quia pẽdet ab epharmoſi mechanica, quæ nihil certi probare poteſt. Vt autem rectius intelligatur, quomodo dimidium totius parallelogrammi ſit affectum erga ſemicirculũ, quomodo etiam totum parallelogrammum ſe habeat ad totum circulum: typus propoſitus penitius eſt inſpiciendus. Parallelogrammum A E G K. excedit ſemicirculum

A I H C.

A I H C. in duabus partibus, nimirum in figura A K I, & H G F. ſemicirculus autem excedit parallelogrammum, per ſuperficiem J H. & per ſuperficiem F C E: quod ſi igitur probari poſſet, figuras A K J. & H G F. ſimul ſumtas, eſſe duabus ſuperficiebus J H. & F C E. ſimul ſumtis æquales: certe probatum eſſet, quod area parallelogrammi æquaret aream ſemicirculi. Horum autem exceſſuum mutua æqualitas nõ poteſt probari rationibus geometricis, ſed per epharmoſin & minutalem diuiſionem, exceſſus vtcunq; non autem prorſus æquales demonſtrantur. Jtem totum parallelogrãmum G K M O. ita implicatum eſt circulo quadrando, vt eum excedat in quatuor partibus, nimirum in figura M A N. & D O P. & F G H. & I K A. totus autem circulus excedit integrum parallelogrammum in tribus duntaxat partibus, nimirum in tribus ſegmẽtis N D. & P F. & H J. Si igitur oſtendi poſſet, quatuor ſuperficies totius parallelogrammi extra circulũ prominentes, æquales eſſe tribus ſegmentis circuli, quæ extra totum parallelogrammum extenduntur: omnino ſequeretur, quod area totius parallelogrammi eſſet æqualis toti circulo. Sed & horum exceſſuum mutua ęqualitas nõ poteſt probari per demonſtrationes geometricas, etiamſi fortaſſis per diligentem epharmoſin exceſſus iſti ęquales eſſe videantur. Nec hoc facit quicquam ad propoſitum, quod ſegmentũ N D. ſit ęquale ſegmento J H. quia vtriuſque chorda ſubtenſa eſt latus

hexagonum. & quod ſegmentum P F. ſit diuiſum in duas ſuperficies æquales, nimirum E P C. & E C F. itē quod figura M A N. ſit æqualis figuræ A K J. & figura D O P. æqualis habeatur figuræ H G F. iſta omnia nihil ad Rhombum: niſi probetur, dimidii parallelogrāmi ſuperficiem æqualem eſſe ſemicirculo. Quomodo autem iſtæ ſuperficies æquales eſſe credētur? niſi prius perſuaſum fuerit, exceſſus vtrinque eſſe æquales: quod nulla ratione geometrica probari poteſt. Hinc perſpicuum eſt, quod omnes, qui circulo vel ęquale quadratum, vel æquale parallelogrammum altera parte longius aſſignare conātur, neceſſario cogantur ſuperficiē rectilineā cum ſuperficie circulari implicare, nec poſſint hoc incommodum effugere, quo minus probare teneantur, vtriuſque ſuperficiei mutuos exceſſus inter ſe æquales eſſe: niſi autem hoc per demonſtrationem geometricam doceant, nunquam animus noſter acquieſcet, ſed perpetuo in dubio hærebit. Præterea ſi admittamus parallelogrammum altera parte longius, idque ad quadratum redigamus, per propoſitionem vltimam libri ſecūdi Euclidis: nonne opus erit, vt quadratum iſtud circulo quadrando partim inſcribamus, partim etiam circumſcribamus, quemadmodum fecit Bryſo? & niſi tunc oſtendere poſſimus, quatuor ſuperficies angulares quadrati extra circulum prominētes, æquales eſſe quatuor ſegmentis circuli extra quadratū extuberantibus, nunquam credemus, quadratum eſſe

æquale

æquale circulo. Si quis obiiciat, non eſſe neceſſarium, vt exceſſus vtrinque demonſtrentur ęquales, quandoquidem totæ figuræ poſſunt demõſtrari æquales: hinc enim ſequitur, etiam partes extuberãtes inter ſe ęquales eſſe. Reſpondendum eſt, falſo aſſumi, quod figuræ integræ inter ſe æquales habeantur. Hic nunc locus poſtulare videtur, vt videamus, an verum ſit, quod a quibuſdam dicitur, ſuperficiem circuli irrationalẽ eſſe magnitudinem, idcirco artifices multos fruſtra laborare, quod aream circuli certo numero definiant. Vt hãc quæſtionem diſſoluamus, ante omnia expendendum erit, quæ ſit proportio laterum trianguli rectanguli A D C. in ſemicirculo inſcripti. Latus angulo recto ſubtenſum A C. eſt diametrus circuli quadrandi, latus autem minus circa angulum rectum D C. eſt latus hexagonum circulo inſcriptum, quod æquale eſt ſemidiametro. Hiſce duobus lateribus notis etiam tertium inuenietur, præſidio propoſitionis penultimæ libri primi elementorum Euclidis: latus enim A C, vtpote diametrus circuli, ponitur decem partium æqualium, ergo quadratum illius eſt centum: & latus D C æquale eſt ſemidiametro, continens partes quinque æquales, ergo quadratum illius eſt vigintiquinque. Si iam minus quadratum dematur de maiore, relinquitur quadratum lateris maioris circa angulum rectum 75. cuius Radix eſt latus A D. Atqui hoc ipſum latus A D. eſt latus trianguli iſopleuri circulo inſcripti, ſicut

manifeſtum eſt ex conſtructione, per ſecundam propoſitionem lib. 4. Euclidis: quæ cum ita habeant, dicimus totum parallelogrammum G K M O. conſtare ex vno latere, habente nouem partes diametri, & ex altero latere, quod Radix eſt de quadrato 75. Sane ſi hæc Radix rationalis eſſet, facile aream totius parallelogrammi metiremur: quia autem Radix illa ſurda eſt & irrationalis, nec poteſt numero certo explicari, cum illius quadratum nō ſe habeat vt numerus quadratus, per propoſitionem 7. libri 10. Euclidis, ſecundū Campanum: hinc fit, vt cogamur latus ſurdum in rationale multiplicare, atque ita producimus aream totius parallelogrammi irrationalem & ſurdam, quæ nō poteſt numeris veris declarari, ſed artificio Algebræ, & per numeros ſurdos inueſtiganda eſt, iuxta methodum libri ſecundi & decimi Euclidis. Sic etiam triangulus A C D. ſuperficiem habet irrationalem, quia latus vnū circa rectum angulum eſt rationale, nimirum partiū quinque, alterum autem eſt irrationale, nimirum Radix de 75. Quod autem latus A D. ſit Radix ſurda de 75. confirmatur etiam per propoſitionem octauam, libri 13. Euclidis, apud Campanum: vbi demonſtratur, quod quadratum lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti, triplum ſit quadrati ſemidiametri, ſiue lateris hexagoni. Quod hac ratione poſſumus explorare: quadratum ſemidiametri & lateris hexagoni eſt 25. & quadratum lateris trianguli iſopleuri circulo inſcripti,

eſt 75.

eſt 75. iam autem certum eſt, quod minus quadratum in maiore ter contineatur. Idem patet ex propoſ. 12. libri 13. Euclidis, apud Theonem, vbi ſic ſcribitur: ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Hæc ideo recenſentur, vt videamus, omnium propoſitionũ geometricarum ſummum conſenſum eſſe: & ſuperficiẽ trianguli rectanguli, aut parallelogrammi rectanguli, irrationalem eſſe, ſi latus vnum circa rectum angulũ certo numero exprimatur, alterum autem ſit Radix ſurda, quę nullo numero explicari poteſt. Vt enim area inueniatur parallelogrammi rectãguli, oportet latus vnum in alterum multiplicare: iam autem certum eſt, quod numeri rationales & irrationales ſiue ſurdi, ſecundum communem logiſticam non poſſint inter ſe multiplicari: & quando opus eſt huiuſmodi multiplicatione, oportet numeros rationales ad ſurdos reuocare, vt eadem vtrinque ſit denominatio: quo autem artificio id ſit peragendum, ex geometrica praxi, quam Algebraicam appellamus, cognoſcendum eſt. Iam videamus, quid illis reſpondendum ſit, qui exiſtimant, parallelogrammum altera parte longius, quod latus vnum habet rationale, & alterum irrationale, eſſe æquale circulo, & cum illud parallelogrammum habeat ſuperficiẽ irrationalem, putant etiam circulum eſſe magnitudinem irrationalem. Non eſt dubium, quin hæc opinio locum haberet, ſi demõſtrari poſſet per viam geome-

tricam, prædictum parallelogrammũ prorſus æquale eſſe circulo: at hoc ſcientifice demõſtrari nequit, quin potius ex mechanicis principiis, & per epharmoſin, ὡς ἐν πλάτει, oſtenditur æqualitas vtriuſque ſuperficiei. Adhæc alii præclari artifices (inter quos Archimedes locũ principem obtinet) circulo quadrando æquale aſſignant parallelogrammum altera parte longius, quod ambo latera circa angulum rectum habet rationalia, & horum ratio ad inſtitutum mechanicum maxime eſt accommodata: quia area huiuſmodi parallelogrammi facilime indagatur. Iuxta horũ igitur placita ſequeretur, quod area circularis eſſet magnitudo rationalis, quatenus certo numero explicari poteſt: manet tamen illud incommodum, quod etiam hi demonſtrare nequeât, parallelogrammum propoſitum exactiſſime eſſe æquale circulo. Quare in nullam abſurditatem incidemus, ſi dicamus, aream circuli nec ſimpliciter eſſe rationalem, nec ſimpliciter irrationalem, ſed rationalẽ & irrationalem ex hypotheſi: quẽadmodum diametrus circuli, per ſe non eſt rationalis, neque irrationalis, ſed ex hypotheſi tantum: ſi enim quadratum circulo inſcribamus, cuius latus vnum ſit rationale, etiã diametrus quadrati, quæ ſimul eſt diametrus circuli, irrationalis eſt & incommenſurabilis. Si autẽ in ſemicirculo inſcribamus triangulum rectãgulum, cuius latus vnum circa angulum rectum ſit 3 partium, & alterum 4 partium, tũc diametrus circuli,

quæ

quæ ſimul eſt ſubtenſa trianguli, eſt commenſurabilis & rationalis, conſtãs 5 partibus: id quod liquet ex propoſitione penultima libri primi elementorum Euclidis. Summa hæc eſt, quocunq; modo ponamus latera affecta eſſe in parallelogrammo rectangulo, nũquam tamen per viam geometricam oſtendemus, iſtud parallelogrammũ prorſus æquale eſſe circulo. Siue enim ambo latera circa angulum rectum conſtent numero rationali, & ſuperficiem complectantur rationalem, ſiue vnum eorum ſit rationale, & alterum irrationale, vt neceſſario ex his conſletur ſuperficies irrationalis, ſemper probandum fuerit, iſtud parallelogrammum circulo implicatum, tanto ſpatio excedere circulum, quãto etiã ſpatio circulus excedit parallelogrammũ: hoc eſt, demõſtrandum fuerit, exceſſus vtriuſq; figurę, tam rectilineæ, quã circularis, inter ſe prorſus æquales eſſe. Patet igitur, qua ratione Scaliger aream circuli ad parallelogrammum altera parte longius reuocandam eſſe cenſuerit: quomodo autem proportionem inter perimetrum & diametrum circuli explicet, videbimus capite 7. in corollario tertio, & quarto.

Soluuntur obiectiones & paralogiſmi Ioſephi Scaligeri.

CAPVT V.

ELementorum cyclometricorũ auctor ſæpe ac mul-

tum gloriatur, ſe nunc tandem ſummi Dei beneficio quadraturam circuli ex tenebris in lucem protuliſſe, atque ineptorum quorūdam Geometrarum friuolas opiniones refutaſſe. Vt autem fidem aliquam imperitioribus faciat, & quadraturam circuli omnino poſſibilem eſſe perſuadeat, partim auctoritate clariſſimorū Philoſophorum, partim etiam rationibus propriis vtitur. Quod ad auctoritatem attinet, citat Ariſtotelem, eiuſque interpretes: & vult eos in hac fuiſſe ſententia, quod quadratura circuli ex fundamentis geometricis demonſtrari poſſit, etiamſi nondum huiuſmodi demonſtratio ſit inuenta. Nouimus locum exſtare apud Ariſtotelem, in prędicamento Relatorum, ex quo nónulli hanc ſuſpicionē conceperunt, quaſi Philoſophus minime neget, quadrationem circuli ſcibilem eſſe, ſed affirmet illā in profundo adhuc latere, neq; a quoquā dextre fuiſſe explicatam. Verba Ariſtotelis hæc ſunt, ſicut a Simplicio citantur lib. 1. Phyſ. contextu 11. οἷον ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς, εἰ ἔστιν ἐπιστητός. ἐπιστήμη μὲν αὐτοῦ οὐκ ἔστι πω, τὸ δὲ ἐπιστητὸν ἐστί. hoc eſt, ſicut ſe habet quadratura circuli, ſiquidem eſt ſcibilis: ſcientia quidem eius nondum eſt inuenta, ſcibile autem eſt. Quid de hoc loco Ammonius & Porphyrius ſentiāt, iam a me capite primo ſatis eſt oſtenſum. Simplicius ſic in prædicamentis interpretatur, Quod ſcibile ſublatum tollat ſcientiam, ſcientia autem ſublata nō deſtruat ſcibile, manifeſtum eſſe videtur: nam ſi demantur ſcibilia, nullius rei erit

ſcientia

ſcientia,& prorſus nulla erit ſcientia: ſi autem tollatur ſcientia, manet tamen ſcibile. Etenim fieri aliquando ſolet, vt propter deſidiam abiiciamus rerum quarundã notitiam, quæ nihilominus manent & ſunt ſcibiles. Nam & in Muſica prius diſcernebamus dieſin, nunc autem hoc interuallum non animaduertimus, quod etiam oſtendit Ariſtoteles exemplo quadraturę circuli: cum enim ipſa ſuo tempore nondum inuenta eſſet, per dubitationem dixit, ſiquidem eſt ſcibile: ſcientia quidem ipſius nondum eſt inuenta, ſcibile autem eſt. Hæc Simplicius. Apparet igitur, Ariſtotelem ex hypotheſi argumentari. ſi enim quadratura circuli ponatur ſcibilis eſſe, etiamſi nondum exſtet illius ſcientia: certũ tamen eſt, quod abſente hac & ſublata ſcientia, nõ tollatur ſcibile, quãdoquidem ex hypotheſi ponimus ſcibile eſſe. Quod autem quadratura circuli, nec actu nec poteſtate dari poſſit, & prorſus ſit impoſſibilis, ex profeſſo docet Ariſtoteles in Elenchis ſophiſticis: vbi ait, ſi maxime circulus quadretur, hanc tamen quadrationem eſſe ſophiſticam, quia non fiat ſecũdum rem, hoc eſt, ſecundum principia geometrica. Sed obiici poteſt, Ariſtotelem loqui de falſis deſcriptionibus Antiphontis, Hippocratis Chii, & Bryſonis, quæ omnes erant ſophiſticæ: ſi autem inuentum Archimedis, aut aliorum artificum examinare potuiſſet Ariſtoteles, forte ipſum nihil in huiuſmodi demõſtrationibus deſideraturum fuiſſe. Ad iſta reſpondendum eſt, Ariſtotelem nouiſſe

cauſam vniuerſalem, ob quã circulus quadrari nequit, ſicut oſtendemus in capite ſequenti. Si quærat aliquis, cur ergo veteres tam fuerint ſolliciti, vt circuli quadraturam inueſtigarent, quandoquidem illa per demonſtrationem haberi nequeat? dicendum eſt, aliquos ex veteribus non ita penitus cognouiſſe naturam trianguli orthogonii, vt putarẽt etiam quaſuis lineas rectas inter ſe comparari poſſe: propterea principium epharmoſeos vbique ſunt ſecuti, & non tantum lineas rationales cũ irrationalibus, verum etiam rectas cũ curuis, & per conſequens, ſuperficiem rectilineam cum circulari æquare conati ſunt. Hi certe id, quod impoſſibile erat, poſſibile eſſe putarunt: atque ſic ex vno errore in plures alios fuerũt præcipitati. De his verum eſt, quod ſcripſit Philoponus libro ſecundo Priorum, cap. 25. ἐζήτησάν τινες, εἰ δυνάμεθα κύκλον τετραγωνίσαι, καὶ οὐκ ἠδυνήθησαν. hoc eſt, quæſiuerunt aliqui, an poſſimus circulũ quadrare, ſed ipſi non potuerunt. Quidam vero optime norunt, quadraturam circuli per fundamenta geometriæ non poſſe indagari, nihil autẽ obſtare, quo minus per rationem mechanicam, ſenſibus vtcunque ſatisfacientem, quadratura circuli haberi poſſit: cum ergo iſti talem quadraturam quæſiuerint, nullo modo ſunt reprehendendi: ſatius enim eſt, vt in operibus mechanicis aliquam habeamus rationem quadrandi circulum, quam vt nullam prorſus admittamus. Porro aduertẽdum eſt, quoſdam veteres diſtinxiſſe quæſita propoſitionum

tionũ geometricarum in πόριμα & ἄπορα, hoc eſt, in ea quę inueſtigari, & nõ inueſtigari poſſent. Quã diſtinctionem tãti fecit Scaliger, vt eã ſuis prolegomenis cyclometricis ſtatim in veſtibulo inſerere voluerit: ea aũt ſumta eſt ex ſcholio cuiuſdã auctoris anonymi, quod habetur ad finem commentariorũ Procli in primũ librũ Euclidis editorũ. Verba quę ibi leguntur, ſunt hæc: πόριμον δέ ἐστιν ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, τουτέστιν εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν. ἄλλως δὲ πάλιν ὁρίζονται τὸ πόριμον, ἤτοι τὸ δι' ἀποδείξεως πορίζόμενον, ἢ ὅ πάντη φαινόμενον ᾖ, καὶ χωρὶς ἀποδείξεως, οἷον ἐστὶ τὸ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι, οὐ μόνον ἰσόπλευρον, ἀλλὰ καὶ σκαληνόν. & cætera. & paulo poſt, ἄπορον δέ ἐστι, τὸ ἀντικείμενον ἔχον, ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς, οὔπω γὰρ ἐν πόρῳ. εἰ καὶ οἷόν τε αὐτὸν πορισθῆναι, καὶ ἔστιν ἐπιστητὸς, ἐπιστήμη δ' αὐτοῦ οὔπω κατείληπται, νῦν δὲ περὶ τοῦ ἤδη ὄντος πορίμου, ὁ λόγος ἀποδίδοται, ὅπερ καὶ κυρίως πόριμον ὀνομάζουσι. τὸ γὰρ μή πω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ πορισθῆναι, πορισὸν ἰδίως προσαγορεύουσιν. ἄπορον δὲ ἐστιν, ὡς εἴρηται, τὸ τῷ πορίμῳ ἀντικείμενον, τοῦτό ἐστιν οὗ ἡ ζήτησις ἀδιάκριτός ἐστι. hoc eſt, parabile vero eſt, quod poſſumus nunc facere & conſtruere, id eſt, ad mentem reuocare. Sed aliter iterum definiunt parabile, quod vel per demonſtrationem acquiratur, aut quod ſine demonſtratione, tanquam ſatis euidens, conſtituatur, vt eſt, centro aliquo & interuallo dato circulum deſcribere, & triangulum conſtituere non ſolum iſopleurum, ſed etiam ſcalenum. & cætera. & paulo poſt, imparabile vero eſt, quod oppoſitum habet, vt eſt circuli quadratura, cuius efficiendæ nondum excogitata eſt ratio. Quod ſi etiam ad inueſtigandum quadratura poſſibi-

lis, & ſcibilis eſt, ſcientia tamen eius nondum comprehenditur. Nunc autem ſermo habetur de eo, quod iã eſt parabile, atque hoc principaliter πόριμον appellant: cuius enim efficiendi ratio nõdum excogitata eſt, poteſt autem inueniri, id proprie ποριστὸν nominant. Ἄπορον autem & imparabile eſt, vt diximus, quod opponitur πορίμῳ & parabili, id autem tale eſt, cuius inuentio nõdum diiudicata eſt. Ex his verbis colligit Scaliger, auctorem illum anonymum ſenſiſſe, quadrationem circuli eſſe quidem ποριστὴν, nõ autem ἐν πόρῳ: hoc eſt, quadraturam circuli poſſe quidem indagari, ſed eius indagandæ rationem nondum excogitatã eſſe. Ac proinde ait Scaliger, mirum nõ eſſe, ſi tantum ſtudium poſuerint veteres in quadratura circuli inueſtiganda, quandoquidem eam ex principiis geometricis & certiſſimis rationibus inueniri poſſe, minime dubitarint. Veruntamen auctor iſte anonymus ex hypotheſi loquitur, ſi quadratura circuli poſſit inueſtigari, & ſit ſcibilis, nondum tamen eius exſtat ſciẽtia: eodem modo Ariſtoteles loquitur in prædicamento Relationis. Sic autem modeſtiæ cauſa, veteribus loqui placuit: cũ enim multi eſſent curioſi quadrationis circuli indagatores, hos quidem a propoſito ſuo deterrere noluerunt, quãdo dixerunt, fortaſſis circulum quadrari poſſe, nec inutile eſſe, ſi omnes viæ ac rationes quadraturam efficiendi tententur, ſed illud adiecerunt, nondum ſcientiam demonſtratiuam, pro circulo quadrando, ab vllo

morta-

mortalium prolatam eſſe, & fortaſſis nũquam talem ſcientiam inueniendam. Quod etiam indicat prædictus auctor anonymus, dum ait, ἄπορόν ἐστιν, οὗ ἡ ζήτησις ἀδιάκριτός ἐστι. hoc eſt, imparabile eſt, cuius inuẽtio nondum diiudicata eſt. Quaſi velit dicere, omnem inuentionem ad principia geometrica examinandam eſſe: ſi enim comperiatur, quod iſtius inuentionis modus cõgruat cum principiis & demonſtrationibus geometricis, tunc illam magni faciendum eſſe. Si autem deprehendatur, inuentionis modum pugnare cum principiis & demõſtrationibus geometricis, hunc certe modum vt abſurdum reiicere debemus, addita hac præfatione, quod nõdum exſtet ſcientia rei quæſitæ. Sic etiam hodie reſpondere poſſumus quibuſdam circuli quadratoribus: ſi ſcibilis ſit quadratura circuli, vt quidam exiſtimant, nondum tamen exſtat eius ſcientia: quam enim nonnulli ſcientiam quadrationis circuli iactant, ea duntaxat eſt mechanica opinio, principiis & demonſtrationibus geometricis repugnans, & propterea ſophiſtica cenſenda Quod ſi nobis mechanici iſti etiam ſua auctoritate moleſti ſint, & quoſuis cuniculos euadendi quærant, dicemus nouum modũ quadrationis ab ipſis allatum, nondum in ſenatu critico geometrarum comprobatũ eſſe, ac proinde quæſtionem in controuerſia verſari: ἡ ζήτησις ἀδιάκριτός ἐστι. Idẽ ſenſiſſe videtur Porphyrius, qui vanidicis quadratoribus circuli hoc reſpondendum eſſe exiſtimat: etiamſi

H

vos ingenioſi alioquin & induſtrii artifices, admodũ inſolenter & ſuperbe gloriemini, quaſi certam demõſtrationem circuli quadrandi attuleritis, examen tamẽ geometricum ſatis oſtendit, vos plurimum decipi, in eo, quod mechanicam duntaxat, non autem apodicticam, & principiis ac demonſtrationibus geometricis conuenientem probationem adducatis. Videatur locus Porphyrii, in cap. 1. a nobis citatus. Simplicius quoq; iudicat, obiiciendum eſſe omnibus circuli quadratoribus, quod inuentiones ipſorum varias contradictiones implicent: ſicut deprehenſum eſt in quadratura Scaligeri, quamprimum in lucem prodiit. Obiicitur nobis auctoritas Philoponi, ex commentario in librum primum poſteriorum Analyticorum, vbi de duplatione cubi & quadratura circuli differit, occaſione ex contextu Ariſtotelis accepta. Si Philoponus affirmaret, quadraturam circuli ideo a veteribus indagatam fuiſſe, quod ipſis certo perſuaſum eſſet, eam per demõſtrationem geometricam haberi poſſe, fortaſſis aliquid contra nos ex verbis illius exciperetur: ſed nihil tale legimus apud Philoponum. Quin potius Philoponus adſtipulatur Archimedi, eumq; affirmat inueniſſe modum quadrationis, qui proxime ad verum accedere videatur: reprehẽdit etiam epharmoſin mechanicam Antiphontis, qua lineam rectam cum curua æquare volebat. Quid de cæteris interpretib. Græcis ſentiendum eſt? an putarunt omnes, circulum ex

principiis

principiis geometriæ quadrandum? certum eſt, quod fuerint alii homines ab iſtis nouis circuli quadratorib. non enim ita leues ſunt exiſtimandi, quaſi in gratiam quadraturæ circuli, voluerint euertere proprietatem trianguli rectanguli, aut quaſi ſtuduerint confundere, & in vnũ chaos miſcere lineã rectam cũ curua. Ipſa geometria hoſtis eſt quadrationis circuli, nõ Ariſtoteles, non interpretes: de iſtis tamẽ hominib. dicere poſſumus, quod fuerint rerum geometricarũ ſtudioſiſſimi. Nũc videamus rationes, quib. auctor cyclometricorũ mechanematum probare conatur, quadraturã circuli ex principiis geometriæ poſſe conſtabiliri. Sic argumentatur: omni ſpatio ſpatium rectilineum æquale dari poteſt: at circulus eſt ſpatium, Ergo circulo ſpatiũ rectilineũ æquale dari poteſt. Videantur cyclometrica Ioſephi Scaligeri, pagina 2. & 3. Maiorem propoſitionem auctoritate veterum confirmare ſtudet: ait enim veteres omnes magna contentione quæſiuiſſe, vt omni ſpatio ſpatium rectilineũ æquale conſtituerent: nunquam autem eos hoc quæſituros fuiſſe, niſi perſuaſum habuiſſent, id ex principiis geometriæ inueſtigari poſſe. Quid de hac auctoritate ſentiẽdum ſit, nos paulo ante explicauimus: nõ enim ſequitur, ſi veteres ſollicite quæſiuerint, vt omni ſpatio ſpatium rectilineũ exæquarent, quod propterea exæquationem hanc inuenerint: nec etiam ſequitur, ſi exæquationem aliquã inuenerint, quod oporteat illam eſſe demõſtratiuam,

quę ſcaliter habere nequeat. Videmus enim omnes, tam veteres quam recentiores, viam mechanicam tãtum ingreſſos eſſe, vt aream circuli cũ ſpatio rectilineo exæquarent. Vt non dicam, auctoritatem ſine ratione nullius momenti eſſe: ſi enim occurrat problema geometricum, ex propriis principiis, non autẽ teſtimoniis clarorum virorum demonſtrandum eſt. Minorẽ propoſitionem ait Scaliger notiſſimã eſſe: quia ſuperficies circularis & rectilinea dicitur χωρίον, & ἐμβαδὸν, id eſt capacitas & area. Vt hunc paralogiſmum diſſoluamus, ſciẽdum eſt, maiorem propoſitionem falſam eſſe, quæ dicit, omni ſpatio ſpatium rectilineũ ęquale dari poſſe, quia contra eam poteſt afferri inſtantia, ſiquidem omnis angulus ſpatium eſt, nec tamẽ omni angulo ęquale rectilineum ſpatium dari poteſt. Angulus enim contingentiæ, qui etiam κερατοειδὴς dicitur, non poteſt per angulum rectilineum comprehendi, vt probat Euclides, libr. 3. elementorum, propoſ. 15. Si autem ſermo ſit de ſpatio per figuram aliquam comprehenſo, iterum negamus huiuſmodi omne ſpatiũ ad quadratum reuocari poſſe. Vt enim totarum figurarum areæ inter ſe conferantur & exæquentur, neceſſe eſt dari certum laterum & angulorum poſitum, quemadmodum oſtendit Euclides libro primo & ſecundo elemẽtorum: at in circulo nec ſunt latera, nec ſunt anguli. Vnde liquet, circuli ſpatium natura ſua differre a ſpatio parallelogrammi rectilinei: quod etiã Euclides ſignificauit in

in definitionibus libri primi. Primo enim definiuit ſuperficiem, quæ longitudinem & latitudinem tantum habeat, cuius termini ſint lineæ: a qua definitione excluditur ſuperficies circularis, quæ vnica linea concluditur. Deinde ſeorſum definiuit circulum, ſiue ſuperficiem & figurã circularem: hæc enim differt a ſuperficie rectilinea: quia circulus non clauditur terminis, quæ ſint plures lineæ, ſed terminatur vna linea circumferẽtiæ, vt recte monet Lucas Paciolus in caſtigationibus ad Euclidem Campani adiectis. Adhęc vocabulũ χωρίον vſitate accipitur pro ſuperficie rectilinea, quæ vt minimum tribus rectis lineis concluditur: quando autem tribus lineis rectis ſuperficies terminatur, fit figura triangularis, quæ omnium rectilinearum ſimpliciſſima eſt. Quare inter principia geometrica vulgo numeratur hoc pronuntiatum, καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσι. hoc eſt, & duæ lineæ rectæ ſuperficiem non comprehẽdunt. Licet igitur ſpatium circulare & rectilineũ ſub eodem genere prædicamẽtali contineantur: ex diuerſiſſimis tamen conſtant principiis, vt in ſe mutuo tranſire nequeant. Sane ex definitione anguli plani, tam rectilinei quam curuilinei apparet, omnem angulum eſſe ſpatium, etiamſi per certam figuram nõdum comprehendatur: quamobrem ſpatium cum figura non reciprocatur. Quare ſtolidiſſimum eſt, ſi quis vocabulũ ſpatii perinde vt figurę, vſurpare voluerit: aut ſi quis ex eo, quod circulus ſuperficies eſt, velit colligere,

circulum eſſe ſuperficiem rectilineam. Produnt igitur inſcitiam ſuam, qui ſic argumentantur, omni ſpatio ſpatium rectilineum æquale dari poteſt, at circulus eſt ſpatium, Ergo circulo ſpatium rectilineũ æquale dari poteſt. Hoc enim perinde eſt, ac ſi ex dato genere, velint inferre certã ſpeciẽ, hac ratione: circulus eſt ſpatiũ, ergo eſt ſpatiũ rectilineũ, ac proinde ad figurã quadratã reuocari poteſt. Sic argumentandũ erat, omni ſpatio rectilineo quadratũ æquale dari poteſt: at circulus poteſt fieri ſpatium rectilineum, Ergo circulo æquale quadratum dari poteſt. Sic etiam Ariſtoteles libro ſecundo Priorum, cap. 25. quadratores circuli argumentari oſtendit, quando talem format ſyllogiſmum, omnis figura rectilinea redigi poteſt ad æquale quadratũ, at circulus redigi poteſt ad figuram rectilineam, Ergo circulus redigi poteſt ad æquale quadratũ. Maior propoſitio certiſſima eſt: nam per propoſitionem vltimã libri ſecundi elementorum Euclidis, cuilibet figuræ rectilineæ poteſt dari æquale triangulũ, & huic ęquale quadratum: ſed minor probatione eget: quomodo enim circulus redigi poſſit ad figuram rectilineam, exẽpli gratia ad triangulum, aut ad parallelogrammum altera parte longius, quod exactiſſime æquale ſit areæ circulari, id non poteſt explicare geometria. Fuerunt quidem multi mechanici, & ante & poſt Ariſtotelem, qui oſtendere conati ſunt, circulum ad ęquale quadratum redigi, hoc eſt, circuli quadraturam ex principiis geome-

geometriæ certiſſime demonſtrari: id tamen nunquã animo ſcientiæ cupido perſuadere potuerunt. Quotieſcunq; enim horum rationes fuerunt examinatæ, toties deprehẽſum eſt, eas ad incertum iudicium ſenſus prouocare. Quare recte dixit Ariſtoteles, huiuſmodi ſyllogiſmum abductionis appellandum eſſe, quod a vera demonſtratione animum abducat: etſi enim minorem propoſitionem epharmoſis aliqua confirmare videatur, ea tamen non gignit certam ſcientiam, quæ nulla ratione labefactari poſſit: ſi autem ſcientia non ſit ἀμετάπτωτος; καὶ ἀμετάπειστος, hoc eſt, a qua animus ſcientis nullis'rationibus dimoueri poſſit, profecto nulla erit demõſtratio. Non igitur ſufficit, vt ex epharmoſi & iudicio oculorum, ſtatuamus parallelogrammum aliquod æquale eſſe circulo, niſi idem per rationes geometricas circulo ęquale eſſe demonſtremus: ſola enim epharmoſis nihil probat, ſed rudioribus tantum geometriæ diſcipulis viam ad maiora cognoſcenda patefacit. Adde quod epharmoſis non poſſit ſummã ęqualitatem indicare: ex ea enim duntaxat cognoſcitur, figuras propoſitas fere æquales, non autẽ prorſus æquales eſſe. Alterum argumentũ eſt, quo Scaliger probare nititur, quadraturam circuli rationibus geometricis maxime conſentaneam eſſe: id tale eſt, Omnis potẽtia poteſt quadrari, at omnis circulus eſt potentia, Ergo omnis circulus poteſt quadrari. Maior propoſitio opus habet limitatione: hoc enim ſenſu vera eſt, quate-

nus omnis linea recta, habet potentiam, vt poſſit quadrari: minor autem falſa eſt: non enim circulus, hoc eſt, area circularis, eſt potentia, ſed eſt ſuperficies & figura, vna linea contenta, quę circumferentia dicitur. Quod autem ſolæ lineæ rectæ dicantur potentiæ, quatenus ex illis quadrata conſtrui poſſunt, patet ex ſecundo lib. Euclidis, propoſ. 12. vbi ſic ait Campanus, *Potētia enim lineæ rectæ, reſpectu quadrati ſui eſt: vnde tantum dicitur poſſe linea qualibet, quantum in ſe ducta producitur.* Idē euincitur ex libro 10. Euclidis, vbi latus tetragonicum potētia nominatur, quod ex eo per multiplicationem quadratum produci queat. Concedamus circuli circumferentiam, per epharmoſin æquari poſſe lineæ rectæ: quid tum poſtea? ſequetur, quod circumferentia poſſit quadrari, nulla autē ratione hinc efficietur, quod area circularis ad ſuperficiem quadratam redigi poſſit: vt enim circulus quadretur, neceſſe eſt ipſius aream prius ęqualem fieri ſuperficiei alicui rectilineæ: at quomodo area circularis tranſeat in figuram rectilineam, vt inter ſe ambæ ſuperficies prorſus æquales habeātur, explicare non poteſt geometria: ſola epharmoſis oſtēdit, tales figuras vtcunque æquales eſſe. Ex quo manifeſtum eſt, Scaligerum abuti vocabulo potentiæ: per hoc enim indicat quoduis ſpatium, ſiue ſit rectilineū ſiue circulare: ac proinde etiam vocabulum Græcum χωρίον, quod aream denotat, multis in locis per vocabulum potentiæ interpretandum eſſe cenſet. Recidit igitur

igitur hic paralogiſmus in idem abſurdum, de quo antea diximus: perinde enim eſt, ac ſi ita argumētaremur, Omnis ſuperficies poteſt quadrari, at circulus eſt ſuperficies, Ergo circulus poteſt quadrari. Quis non videt, hic eſſe manifeſtam petitionem principii? ſumitur enim, quod probandum erat. Probandum eſſet, omnē ſuperficiem poſſe quadrari: hinc enim ſequeretur, etiā circulum, qui ſuperficies eſt, poſſe quadrari. Certe geometria haud affirmat, omnem ſuperficiem poſſe quadrari, ſed vult omnem ſuperficiem rectilineam cuiuſcunque parallelogrammi, ad æquale quadratum reuocari poſſe: qui autem circulum, hoc eſt, ſuperficiem curuilineam quadrare cupiunt, principiis geometriæ contradicunt, dum ex ſola epharmoſi argumenta æqualitatis petēda eſſe iudicāt. Sed bene res habet, quod non diffiteantur, quadrationis circuli fundamentum poſitum eſſe in applicatione lineæ curuę ad rectam, & in multiplici areæ circularis per ſpatia rectilinea diuiſione. Primo enim acriter contendunt, ex rotunda linea commodiſſime rectam effici poſſe, quod ex mechanica epharmoſi, & iudicio ciſiariorum vel aurigarum confirmant. Quis vero hos ita inſanire docuit, vt ex recto curuum, & ex curuo rectum ſine mutua quātitatum corruptione efficere conentur? angulus certe rectus, ſemper rectus eſt, & nunquam poteſt fieri obliquus, niſi per accidēs, & ratione materiæ, quę vi aliqua externa contorquetur. Sic etiam linea curua, vtpote

circularis, non poteſt in rectum extendi, quin natũra eius tota deſtruatur: nam in minima quauis particula circumferentiæ, etiam ſenſum fugiente, curuitas ineſt, quæ cũ recto comparari nequit. Quod ſi autem imaginemur, per inflexionem lineam curuam rectificari, & æqualem fieri rectæ lineæ, putauimus rem vnam & eandem manere ſibi ſimilem, ſiue proprietates ſuas eſſentiales retineat, ſiue amittat: ſed hoc ab omni ratione maxime eſt alienum. Deinde iidem circuli quadratores ſuperficiem & aream circularem, in multas figuras rectilineas reſoluere cogũtur: ex quibus ſimul collectis efficiunt parallelogrammum aliquod altera parte longius, cui æquale quadratum conſtituunt: atque hac ratione exiſtimant, ſe totam aream circularem, ad æqualem quadratam ſuperficiem redegiſſe. At nemo eſt ita hebes, qui non animaduertat, ſuperficiem totã circularem non poſſe diuidi in figuras rectilineas: etſi enim maxima ex parte ſuperficies circularis diſtribuatur in figuras rectilineas, multæ tamẽ particulæ in circumferentia relinquũtur, quæ ſenſum effugiũt. Quare cõcludimus, ficulneum eſſe præſidium, quo per ſolam epharmoſin nonnulli probare conantur, lineas duas, aut ſuperficies duas, æquales eſſe. Vt enim epharmoſis nos fallere poteſt, quando lineam rectam rationalem cum irrationali æquiparare volumus: ſic etiam eadem epharmoſis nos in errorem ducit, quando per eam volumus lineam rectam cum curua comparare, aut contra:

tra:item quando volumus oſtendere, ſuperficiem rectilineam æqualem eſſe circulari, quod vna ab altera comprehendi videatur.

Confirmatur ſententia Ariſtotelis, quod impoßibile ſit circulum quadrari.

CAPVT VI.

SI diligenter expendamus, quæ ab Ariſtotele ſcripta ſunt in tractatione Elenchorum ſophiſticorum, inueniemus cauſam vniuerſalem & ſcientificam, ob quã circulus a nemine mortalium quadrari poteſt. Scribit Ariſtoteles, ſi maxime circulus quadretur, ſcilicet per rationem aliquam mechanicam, hanc tamen quadrationem eſſe ſophiſticam, quia non petat argumenta ab intima rerum natura. Verba illius, cum breuia ſint & neruoſa, hoc loco repetam: inquit, εἰ καὶ τετραγωνίζεται ὁ κύκλος, ἀλλ' ὅτι οὐ κατὰ τὸ πρᾶγμα, διὰ τοῦτο σοφιστικός. hoc eſt, etiamſi quadretur circulus, manifeſtũ tamen eſt, quod non ſecũdum rem: propterea quadratio ſophiſtica eſt. Sciendum autem eſt, Ariſtotelem paſſim in ſuis operibus, & pręcipue in Organo logico, rationes ſophiſticas opponere demõſtrationi, quę certiſſimam parit ſcientiam. Huius rei habemus manifeſtum exemplum in definitione ſcientiæ, quam affert lib. 1. poſt. Analyticorũ, contextu 7. inquiens, Ἐπίστασθαι δὲ οἰόμεθα ἕκαστον ἁπλῶς (ἀλλὰ μὴ τὸν σοφιστικὸν τρόπον, τὸν κατὰ συμβεβηκὸς) ὅταν τήν τ' αἰ-

τί αι οἰώμεθα γινώσκειν, δι' ἣν τὸ πρᾶγμά ἐστιν, ὅτι ἐκείνου αἰτία ἐστί, καὶ μὴ ἐνδέχεσθαι τοῦτ' ἄλλως ἔχειν. hoc eſt, Scire autem nos arbitramur vnumquodque ſimpliciter (ſed non ſecũdum ſophiſticum modum, qui eſt ex accidente) quando & cauſam nos arbitramur cognoſcere, propter quam res eſt, quod illius cauſa ſit, neque hoc poſſit aliter habere. Vult dicere Ariſtoteles, ſcientiam eſſe cognitionẽ cuiuſq; rei per ſuam cauſam proximam & immediatam, vt in ea cognitione animus certiſſime acquieſcere poſſit, & res ipſa aliter habere nequeat : ſi autem non per cauſam propriam, ſed per accidẽtia aliquid cognoſcamus, hũc cognitionis modum ſophiſticũ eſſe, & leuem quandam in animo opinionem gignere pronuntiat. Cum igitur Philoſophus expreſſe dicat, circulum non poſſe quadrari ſecundum rem, hoc eſt ſimpliciter, & iuxta propria rei ſubiectæ principia : omnino neceſſe eſt, vt quadratio circuli ab artificibus mechanicis allata, tanquam ſophiſtica habeatur, quod per accidentia, more ſophiſtarum, & per externam figurarum applicationem, propoſito ſuo fidem facere conetur : cum tamen certum ſit, in hac quadratione animum ſciẽtiæ cupidum non acquieſcere, & quadrationem illam ita affectã eſſe, vt poſſit aliter habere. Hinc apparet, quare Ariſtoteles quadrationem circuli ſophiſticam eſſe dixerit. Vt autem nos intelligamus, id nõ tantum verũ eſſe de quadratione Antiphontis, Hippocratis Chii, & Bryſonis, verum etiã in vniuerſum de quauis quadra-

tura circuli, quæ poſt Ariſtotelem vel excogitata eſt, vel deinceps excogitari poteſt: operæpretium fuerit, ſi examinemus rationes vniuerſales, a quibus Ariſtoteles perſuaſus, putauerit impoſſibilem eſſe omnem circuli quadraturam, quibus etiam rationibus nos locũ relinquere oportet, niſi principia geometriæ funditus euertere velimus. Primum fundamentum Ariſtotelis eſt, quod diametrus quadrati cum ſuo latere ſit incõmenſurabilis: id autem demonſtrabimus capite ſequẽti, ex propoſitione penultima libri primi elemẽtorum Euclidis. Si diametrus quadrati cum ſuo latere ſit incommenſurabilis, hoc eſt, nullo numero exprimi, nullis etiam partibus definiri poſſit, ſequitur vanam & inutilem eſſe epharmoſin, per quam artifices mechanici lineam rectam rationalem cum recta irrationali metiuntur: certum enim eſt, in hiſce quantitatibus toto genere phyſico differentibus, nõ reperiri communem menſuram, vel numero, vel certis partibus explicabilẽ. Idem intelligendum eſt de latere irrationali cuiuſcunque trianguli rectanguli: ſi enim in triangulo rectangulo detur latus aliquod irrationale atque incommẽſurabile, cęteris duobus lateribus exſiſtẽtibus rationalibus & commenſurabilibus, certum eſt, quod latus irrationale cum rationalibus lateribus nullam habeat communem menſuram, quæ certo numero, vel certis partibus exprimi poſſit. Quare mechanicum eſt, & repugnans principiis geometriæ, ſiquis per epharmoſin

latus irrationale cum rationalibus lateribus conferre, & iiſdem partibus exprimere conetur. In hoc abſurdũ incidit Archimedes, celeberrimus mechanicorum artifex, qui in ſemicirculo deſcripſit triangulum orthogonium, cuius latus vnum circa angulum rectum ponitur ſeptem partium, & alterum ſtatuitur viginti & vnius partium: dixit enim hypotenuſam eſſe fere 22. partium, cum tamen hypotenuſa ſit Radix ſurda de quadrato 490. vt monſtrauimus capite tertio. Si quærat aliquis, quid hoc faciat ad propoſitum, quod linea irrationalis non poſſit comparari cũ rationali? reſpondendum eſt, voluiſſe Archimedem oſtendere parallelogrammum, quod æquale eſſet circulo quadrando: id autem parallelogrammum dixit fieri ex latere vno, quod æquaret dimidiam ſubtenſam prędicti trianguli orthogonii, & contineret partes vndecim, & ex latere altero, quod æquale eſſet ſemidiametro circuli quadrandi, ac haberet partes $3\frac{1}{2}$. Atqui huiuſmodi parallelogrammum non potuit Archimedes oſtendere per viam geometricam: quia falſam ſumſit hypotheſin, quod hypotenuſa illius trianguli orthogonii, in partes ęquales viginti duas ſit diuiſa, cũ ſic diuidi nequeat: quandoquidem eſt Radix ſurda de quadrato 490. Ergo latus vnum parallelogrammi non potuit eſſe vndecim partium, quibus dimidia ſubtenſa conſtare dicebatur ab Archimede. Alterum fundamentum Ariſtotelis eſt, quod linea recta cum circulari nulla ratione poſ-

ne poſſit comparari. Quamobrē libro ſeptimo auſcultationis Phyſicæ colligit, neque motum circularem cum motu recto conferendum eſſe. Sic autem argumentatur, ſi motus circularis cum recto comparabilis eſſet, ſequeretur quod circumferentia cum linea recta comparari poſſet: atqui conſequēs abſurdum eſt, Ergo etiam antecedens. Quod autem abſurdum ſit, ſi circumferentia cum recta linea comparetur, ex Geometria intelligere poſſumus: quæ enim ex diuerſæ naturæ principiis conſtant, in ſe inuicem permiſceri nequeūt: quin immo ſi circumferentiam cum recta conciliare velimus, ſemper in manifeſtas contradictiones incidemus. Exemplum euidens habemus in angulo ſemicirculi: is enim licet ad rectum maxime accedere videatur, tamen propter ſolum punctum contingentiæ, angulus rectus non eſt. Cæterum Ariſtoteles in ſeptimo Phyſicorum duas præſcribit conditiones, quæ requiruntur ad omnia comparabilia: quarum prima eſt, vt illa, quæ comparari debent, ſint genere vniuoca, non autem æquiuoca. Sic velox & tardum prædicatur de motu recto & orbiculari, ſed æquiuoce: ſic etiam linea recta & circularis, quanquam habeant aliquod genus commune, id tamen de illis æquiuoce dicitur. Secūda conditio eſt, vt illa, quę comparari debēt, non tantum genere ſint vniuoca, ſed etiam vnam habeant ſpeciem indiuiduam, quæ nullam aliam admittat differētiam: huius conditionis defectu, latio recta & orbicularis in-

ter ſe non poſſunt comparari, quia non continentur ſub vltima aliqua ſpecie: eſt enim latio genus quoddā diuiſum in plures ſpecies, nimirum in lationem rectā & orbicularem. Sic etiam inter ſe non poſſunt comparari linea recta & orbicularis, item linea recta rationalis, & linea recta irrationalis: nam linea non eſt ſpecies vltima, ſiquidem diuiditur in rectam & circumferentiam. item linea recta non eſt ſpecies vltima, quia diuiditur in rationalem & irrationalem, quæ tota natura inter ſe differunt. Animaduertēdum igitur eſt, vt monet Ariſtoteles, multa quidem videri, quaſi non ſint æquiuoca, re ipſa tamen eſſe æquiuoca: niſi enim duo aliqua eiuſdem ſint naturę, inter ſe minime comparari poſſunt: eiuſdem autem naturæ ſunt illa, quæ in ſpecie aliqua indiuidua conueniūt: ſic color albus cum albo, & linea recta rationalis cum rationali comparatur: color autem albus cum nigro, & linea recta rationalis cū irrationali conferri nequit: quia hæc genere duntaxat, non autem ſpecie indiuidua conueniunt. Inſuper notandum eſt, ea quę inter ſe ſunt comparabilia, neceſſario haberē communem aliquam mēſuram, iuxta quā æquari poſſunt: quod ſi autē inter ſe æqualia fieri poſſint, poterunt etiam maiora & minora dici: ſi non poſſint fieri æqualia, neque maiora, neque minora dicentur. Eadem ratio eſt ſuperficierum, quæ eſt linearum: quæ enim ſuperficies habent ſpeciem vltimā, vt vnius ſint naturæ, illæ inter ſe comparari poſſunt: ſic circulus cum

cúm circulo, & ſuperficies rectilinea cum ſuperficie rectilinea, & quadratum cum quadrato, item triagulum cum triangulo cōfertur. Quæ autem ſuperficies in genere duntaxat conueniūt, neque eandem habent naturam in ſpecie vltima, illæ comparari nequeunt: talis eſt ſuperficies circularis & rectilinea. Loquimur auté de tota ſuperficie circulari, & de tota ſuperficie rectilinea: in partibus enim harum ſuperficierum nonnunquā poteſt certa proportio inueniri. Sumit igitur Ariſtoteles, circumferentiam cum linea recta nequaquā comparari poſſe: quod in epharmoſi Antiphontis maxime eſt perſpicuum: nam quantulacunque ſit portio circumferentiæ, ea vtique non poteſt congruere ad latus rectum trianguli: nec minus euidens hoc eſt in epharmoſi rotationis, cum & ibi minimum punctum circumferentiæ nō poſſit applicari ad minimum punctum lineæ rectæ. Concedent mihi libēter ſagaciſſimi mechanici, quod epharmoſis rotationis incipiat a certo puncto: atqui hoc affirmare nequeunt, quod punctum circumferentiæ applicatum ad punctum lineæ rectæ, ſit punctum indiuiſibile: certum enim eſt, quod iſtiuſmodi punctum in ſenſus incurrat, & inſtar continui in infinitum diuidi poſſit. Quod ſi ita eſt, neceſſario ſequitur, etiam minimum punctum in circumferentia, curuum eſſe, & minimum punctum in linea recta, rectum eſſe, vt epharmoſis locū habere nequeat: quare decipiūtur mechanici, qui putant hæc duo pun-

cta eiuſdem eſſe naturæ, & propter exilitatem negligi poſſe. Profecto ſi iſti Mechanici diligenter contemplarentur angulos contingentiæ, longe aliter iudicarent: quando enim rota mobilis in linea recta reuoluitur, ſemper fiunt anguli contingentiæ, ex linea ſcilicet recta, & gibba parte circumferentiæ procreati: qui anguli licet ſint omnium acutorum minimi, non tamen flocci faciendi ſunt: ex eo enim ipſo, quod hi anguli inter ſe diſtincti ſint, cõſtat minimam portionem rectæ lineæ & circumferentiæ ſuas proprietates naturales ſeruare. Idem manifeſtius apparet, ſi anguli contingẽtiæ extra circulum facti, conferantur cum angulis ſemicirculi proxime adiacentibus: quantum enim ſpatium deſideratur in angulis ſemicirculi, quo minus recti ſint, tantum eſt ſpatium angulorum contingentię: iſtud autem ſpatium tantillum eſt, vt vix oculis diſcerni queat. Sed contra hoc axioma, quod rectum non poſſit ad curuum applicari, adduci poteſt quadratura circuli, vt monet Simplicius: fuerunt enim olim quidã artifices, atque etiamnum nonnulli reperiuntur, qui exiſtimant circulum hac ratione quadrari poſſe, quod circumferentiæ detur linea recta æqualis: id ſi verũ eſt, facilime deſcribitur parallelogrammum altera parte longius, quod æquale ſit circulo. Quid ad hoc reſpondendum ſit, perſpicue docet Simplicius, libro ſeptimo Phyſicorum, contextu 21. quando ſic ſcribit, Ἀπορήσας δὲ τοῦτο, δείκνυσιν ὅτι οὐκ ἔστι πᾶσα κίνησις πάσῃ συμβλητή· οὐ γάρ ἐστι

πᾶσα

πασῶν κοινόν τι μέτρον· ἀλλ' αἱ ὁμοειδεῖς μόνον ἀλλήλαις. δεικνῦσι δὲ αὐτὸ δι' ἀδυνάτου, ἐπὶ δυεῖν φορῶν, πρῶτον τῆς τε ἐπ' εὐθείας καὶ τῆς κύκλῳ, προλαβὼν τὸ ἤδη δεδειγμένον αὐτῷ, τὸ ὁμοταχῆ εἶναι, τὰ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἴσον κινούμενα· καὶ ἐπιφέρων ἀδύνατον τῷ συμβλητὰς εἶναι, τὸ ἴσην ἔσεσθαι εὐθεῖαν γραμμὴν περιφερεῖ. εἰ γὰρ εἴη ἰσοταχῆ τινα, τὸ μὲν ἐπ' εὐθείας τινὸς κινούμενον, τὸ δὲ ἐπὶ περιφεροῦς· ἰσοταχῆ δέ ἐστι τὰ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἴσον κινούμενα, ἴση ἔσται ἡ εὐθεῖα τῇ περιφερεῖ. τοῦτο δὲ ἐζητεῖτο μὲν ἔτι, εἰ δυνατὸν εὐθεῖαν ἴσην εἶναι περιφερεῖ· ἀπέγνωστο δὲ μᾶλλον. καὶ διὰ τοῦτο οὐδὲ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εὕρητό πω· καὶ νῦν δὲ καὶ δοκεῖ ηὑρῆσθαι, ἀλλὰ μετά τινων ὑποθέσεων ἀντιλεγομένων. αἴτιον δὲ τοῦ μήπω ηὑρῆσθαι τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν, ζητεῖσθαι ἔτι καὶ τό, εἰ ἔστιν εὐθεῖα περιφερεῖ ἴση· τοῦ μὴ δέ, ὅτι ἀδύνατα ταῦτα ἐστὶν ηὑρῆσθαί πω. ὥσπερ τὸ τὴν διάμετρον ἀσύμμετρον εἶναι τῇ πλευρᾷ· δι' ὃ τοῦτο οὐδὲ ζητεῖται ἔτι. hoc eſt. Cum de hoc dubitaſſet, oſtendit nõ omnem motum omni motui comparabilem eſſe. Nõ enim eſt omnium communis aliqua menſura, ſed qui ſunt eiuſdem ſpeciei, inter ſe tantum comparantur. Id autem oſtendit per impoſſibile, in duabus lationibus, primum in recta & circulari, aſſumens id, quod iam ab ipſo demõſtratum eſt, nimirum æque velocia eſſe, quę in æquali tempore æqualiter moueantur: & infert impoſſibile, ex eo, ſi motus iſti comparabiles ſint, fore vt linea recta æqualis ſit circulari. Si enim aliqua æque velocia ſint, quorum vnum in recta, alterum autem in circulari mouetur: æque velocia autem ſunt illa, quæ in æquali tempore, æqualiter mouentur, recta erit æqualis circulari. Hoc autem amplius quærebatur, an linea recta poſſit æqualis eſſe circulari? ſed id magis ignoratur. Et propterea neque circuli quadratura inuenta

eſt adhuc: licet autem nunc inuenta eſſe videatur, inuenta tamen eſt cum quibuſdam hypotheſibus cõtradicentibus. Cauſa autem, cur circuli quadratio nondũ ſit inuenta, hæc eſt, quod adhuc quæratur, an recta ſit æqualis circumferentiæ? cur autem hoc quęri non debeat, cauſa eſt, quod hæc aliquando inueniri ſit impoſſibile, quemadmodum nouimus diametrum eſſe incommenſurabilẽ lateri, idcirco hoc non quæritur amplius. Hactenus Simplicius. In hiſce verbis ſignificat Simplicius, eos plurimum falli, qui exiſtiment, lineam rectam ideo poſſe æquari circumferentiæ, quod quadratura circuli inuenta præſupponat hãc hypotheſin, ſcilicet circumferentiam circuli per epharmoſin fieri æqualem lineæ rectæ. Sed falſa eſt hæc hypotheſis: ſiue enim ſpectemus epharmoſin Antiphontis, ſiue etiam epharmoſin rotationis cõſideremus, manifeſtum eſt, quod per vtramque tollatur ſectio continui in infinitum. Vult igitur Simplicius, per epharmoſin mechanicam poſtulari, quod in geometria nullum locũ habeat. Quamobrem ait Simplicius, hoc certum eſſe in quauis quadratura circuli falſitatis indicium, quod ad eam ſemper ſequãtur manifeſtæ contradictiones. Neque hic eſt prætereundus locus Themiſtii, qui libro ſeptimo Phyſicorum expreſſe fatetur, lineam circularẽ cum recta non poſſe comparari, ſic autem inquit, οὐκ ἔτι δὲ πᾶσα κίνησις πᾶσι συμβλητή. οὐδὲ κοινὸν μέτρον ἀπασῶν. τί γὰρ ὅμοιον πάθους καὶ φορᾶς; ἀλλ' οὐδὲ φορᾶς, τῆς κύκλῳ ἐπὶ καὶ εὐθείας. οὔτε

γὰρ

γὰρ τὰ διαστήματα συμβλητά, ἥ τε περιφερὴς γραμμὴ καὶ ἡ εὐθεῖα. οὔτε γὰρ μείζων ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας, οὔτε ἐλάττων. hoc eſt, non eſt autem omnis motus omnibus comparabilis. neq; eſt communis mēſura omnium. quid enim ſimile habet paſſio cum latione? ſed neque lationi (communis eſt menſura) cum circulari & recta. neque enim interualla ſunt comparabilia, ſcilicet circularis linea & recta. neq; enim vna maior dicitur quam altera, neque minor. Ex his omnibus manifeſte apparet, Ariſtotelem cauſas iuſtiſſimas habuiſſe, ob quas voluerit impoſſibilem eſſe quadraturam circuli: nec quiſquam interpretum ita ineptus & imperitus geometriæ fuit, qui contrariam ſententiam defendere niteretur. Iam quærat aliquis, quomodo ex his duobus poſitis fundamentis Ariſtotelis, ſequatur impoſſibilem eſſe quadrationem circuli? reſpondēdum eſt, vidiſſe Ariſtotelem, circulum redigendum eſſe ad figuram rectilineam, ſi quadrari debeat: quemadmodum oſtendit in capite 25. libri ſecūdi Priorum. Negat autem Ariſtoteles, circulum poſſe redigi ad figuram rectilineam, ita ſcilicet vt tota area circularis exactiſſime ſit æqualis figuræ rectilineæ. Quāuis enim multi hoc ſint aggreſſi, vt oſtenderent figurā rectilineam, nimirum triangularem aut parallelogrāmam altera parte longiorem, æqualem eſſe circulo: tamen nunquam ſine contradictionibus manifeſtis propoſitum obtinere potuerunt. Certe totus circulus nūquam poteſt redigi ad figuram rectilineam, ex qua

ad quadratum tranſeat: poteſt quidem circulus diuidi in multa ſpatia rectilinea, ſed plurimę ad circumferentiam portiones relinquuntur, quę non ſunt rectilineę, nec ad figuras rectilineas reuocari poſſunt. Deinde ſi maxime aliqua pars circuli, vt eſt lunula Hippocratis, poſſit redigi ad figuram rectilineã, non tamen omnes partes circuli tales ſunt lunulę, vt ad figuras rectilineas reducantur. Præterea ſi concederemus, perimetrũ circuli cum diametro per certam menſuram comparari poſſe: nondum tamẽ ſequeretur, quod tota ſuperficies circularis poſſet conformari in figuram rectilineam. Etſi enim mechanici putent, circumferentiam in lineam rectam explicatam, poſſe coniungi cum diametro circuli ad angulos rectos, ita vt inde triãgulum orthogonium, aut parallelogrammum altera parte longius, æquale circulo conſtitui videatur: non tamen animaduertunt, circumferẽtiam cum diametro in ipſo circulo non efficere angulos rectos, ac proinde neque extra circulum circumferentiam in rectum extenſam cum diametro debere efficere angulos rectos. Quare plus ſumunt Mechanici, quam ipſis ex principiis geometriæ concedi poſſit: nam per propoſitionem 15. & 30. libri tertii elementorum Euclidis, euidenter demõſtratur, angulos ſemicirculi, qui fiũt a diametro & circumferentia, non eſſe rectos, ſed minores rectis: nam in ſolo puncto contingentiæ deficiunt, quo minus recti ſint: hoc autem punctum certa quantitate definire

non

non poſſumus. Quod ſi igitur non poſſimus demonſtrare, quæ ſit menſura angulorum ſemicirculi, cum tamen ad rectos maxime accedere videantur, multo minus aliorum angulorum in reliquis ſegmentis eiuſdem circuli certam menſuram comprehendere poterimus, cum hi ſegmētorum anguli multo magis a natura rectorum deflectant. Et quid fiet de angulis minimorum ad circumferentiam ſegmentorum, etiam ſenſum omnem penitus effugientium? certe nulla in his vel angulorum, vel ſuperficiei erit menſura. Haud igitur immerito exclamare poſſumus, Tantæ molis erat circum quadrare rotundum!

Declaratur propoſitio penultima libri primi elementorum Euclidis.

CAPVT VII.

PRopoſitio penultima libri primi Euclidis aurea & nobiliſſima eſt, iuxta quā omnia examinare oportet, quæcunque in tota Geometria demonſtrātur. Ea talis eſt, In rectangulis triangulis, quadratum a latere rectum angulum ſubtendente deſcriptum, æquale eſt duobus quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. Demonſtrationem huius theorematis, cuius inuentio Pythagoræ tribuitur, repetere nolo: eſt enim notiſſima, & a pluribus commētatoribus fideliter expoſita: id tantum hoc loco agam,

vt corollaria quædam ex hac propoſitione exſtruam, quæ immenſum vſum eius patefaciant: & vt oſtẽdam friuolas eſſe rationes mechanicorum, quibus demonſtrare conantur, inter perimetrum & diametrum circuli exactiſſimam ex principiis geometriæ proportio-
1. nem dari. Primum corollariũ eſt, quod cognitis duobus lateribus quibuſcunq; trianguli rectanguli, poſſimus peruenire in cognitionem reliqui lateris. Repetamus figuram, per quam ſupra capite tertio inuentum Archimedis declarauimus. Ecce datur triangulus rectãgulus in ſemicirculo, cuius latus DF eſt ſeptem partiũ, latus autem FE eſt 21 partium, dabitur igitur reliquũ latus, quod angulo recto opponitur. Notandũ eſt, quod hic dentur duo latera rectũ angulum cõplectentia: oportet igitur horũ duorũ laterum quadrata ſimul addere, & ex aggregato extrahere Radicẽ, hæc enim Radix erit quãtitas hypotenuſæ. Verbi gratia, quadratũ ex ſeptem eſt 49. & quadratum ex 21 eſt 441. quæ ſi ſimul addantur, efficiunt



quadra-

quadratū lateris ſubtenſi, ſcilicet 490. cuius Radix eſt quantitas lateris indagandi Si autē detur hypotenuſa cū proxime adiacēte latere, oportet quadratū minoris lateris auferre a quadrato maioris lateris, & tūc remanebit quadratū tertii lateris. Verbi gratia, hypotenuſa ſit partium 10. quadratum igitur erit 100. & latus proxime adiacens ſit quinque partium, ergo quadratum erit 25. ſi iam minus quadratum ſubtrahatur a maiore, relinquentur 75. quod eſt quadratum tertii lateris. Radix igitur de quadrato 75. erit quantitas tertii lateris. Sumamus alia exempla: in triangulo aliquo rectangulo dantur duo latera, quæ complectūtur angulum rectum: vnum latus habet 6. partes, alterum eſt 8 partiū: quadratum de 6 eſt 36. quadratum vero de 8 eſt 64. quæ duo quadrata ſimul addita, efficiunt 100. ſcilicet quadratum lateris ſubtenſi angulo recto. Radix igitur de quadrato 100. quæ eſt decem partium, ſuppeditat quantitatem ſubtenſæ. Si autem ſubtenſa detur cum latere proxime adiacente, inueſtigatur tertium latus, hoc modo: ſubtenſa ſit decem partium, ergo quadratū erit 100. latus alterum ſit octo partium, ergo quadratum erit 64: ſubtracto igitur quadrato minore de maiore, relinquetur quadratum tertii lateris, nimirū 36. cuius Radix, quę eſt ſex partium, ſuppeditat quantitatem lateris tertii. Ex quo colligere licet, in triāgulo rectangulo ſic inter ſe omnia affecta eſſe latera, vt cognitis duobus lateribus tertium inueſtigetur per πυθα-

φαίρεσιν, hoc eſt, vel per additionem, vel per ſubtractionem: ſi enim dentur duo latera rectum angulum amplectentia, ex additione duorum quadratorum, colligitur tertii lateris quadratum: ſi autem detur hypotenuſa cum proxime adiacente latere, ex ſubtractione vnius quadrati ab altero, inueſtigatur quadratum tertii lateris. Colligitur præterea, non omne quadratum habere Radicem rationalem: niſi enim quadratũ numero vere quadrato exprimatur, non poteſt habere Radicem rationalem, quæ certo numero definiri poſſit: huiuſmodi autem Radix, quæ nullo numero explicari poteſt, dicitur irrationalis, ſiue ſurda: talis eſt Radix de quadrato 490. & de quadrato 75. hi enim numeri non ſunt quadrati, vt ex iis certa & rationalis Radix extrahi queat. Quamobrem in geometriam peccãt, qui ex numeris non quadratis extrahunt Radicem aliquam proximam, vel integris, vel fractis numeris explicatã: huiuſmodi enim numeri non quadrati, Radices rationales admittere nequeunt. E contrario ſi dentur numeri vere quadrati, facilime ex iis Radix rationalis, & certo numero explicabilis, extrahi poteſt: ſic ex quadrato 100. Radix quadrata eſt decem, & ex quadrato 64. Radix quadrata eſt octo. Obſeruãdum autem eſt, quod hic per rationale & irrationale, intelligamus illud, quod ſecundum longitudinem tale eſt. Nam Euclides in libro decimo, gradus quoſdam conſtituit rationalium & irrationalium: quędam enim ſola poten-

tia,

tia, quædam longitudine & potētia ſunt rationalia & irrationalia: nos autem de poſteriorib. hic loquimur.
Secundum corollarium eſt, quod diametrus quadrati 2.
cum latere eiuſdem quadrati ſit incommenſurabilis, ſicut Euclides demõſtrat ad propoſitionem vltimam libri decimi elementorum geometricorum: & Campanus id oſtēdit per propoſitionem ſeptimam libri 10. quidam etiā putant hoc demõſtrari poſſe per propoſ. 8. libri octaui elem. Euclidis. Ego vero exiſtimo, hoc corollarium ſine magno labore etiam probari poſſe per propoſitionem penultimam libri primi Euclidis: cum enim diametrus ſecet totum quadratum in duos triangulos orthogonios, & æquales, neceſſe eſt vt diametrus quadrati ponatur irrationalis, quando duo latera angulum rectum amplectentia ſunt rationalia: ſi autem quātitas diametri rationalis ſtatuatur, oportet reliqua duo latera, eſſe irrationalia. Vtrumuis igitur ex hypotheſi ſtatuatur, ſemper diametrus erit incommēſurabilis cum latere quadrati: vt ſi diametrus ſit Radix irrationalis, neceſſe eſt latus quadrati eſſe rationale, ſi autem diametrus ponatur rationalis, neceſſario latus quadrati erit irrationale. Quod vt rectius intelligamus, ſciendum eſt, quadratum diametri duplum eſſe quadrati, quod ex latere vno deſcribitur: & cōtra, quadratum lateris vnius, dimidium eſt quadrati diametri: ſicut idem a Luca Paciolo demonſtratur ad propoſ. penultimam libri primi Euclidis. Vt ſi quadratū dia-

metri ſit 200. quadratum lateris vnius erit 100: ac proinde Radix quadrata de 100, videlicet denarius numerus, definiet quantitatem lateris. Contra, ſi quadratum lateris ſit 100. quadratum diametri erit 200: cum autẽ ex hoc numero Radix quadrata extrahi nequeat, diametrus non poterit certo numero definiri, ideoq; diametrus dicetur eſſe Radix ſurda de 200, numero minime quadrato. Iam videamus, an verum ſit quod diximus, diametrum quadrati eſſe irrationalem, ſi latera quadrati ſtatuantur rationalia: aut cõtra, diametrum quadrati eſſe rationalem, ſi latera quadrati ponantur irrationalia. Ponamus quadratum aliquod eſſe cẽtum pedum, vt latus vnum longitudinem habeat decẽ pedum: ſi hoc quadratũ per diametrum ſecemus in duos triangulos orthogonios, ſibi inuicem æquales, diametrus erit irrationalis: cum enim latus vnum ponatur rationale, ſcilicet pedum decem, quadratum illius erit centum, & diametri longitudo erit Radix de ducẽtis: at Radix illa ſurda eſt & irrationalis. Item ſi ſtatuamus quadratum aliquod continere pedes quinquaginta: latus erit irrationale, ſcilicet Radix ſurda de 50, numero non quadrato: iam diuidamus quadratum hoc bifariã per diametrum, & erit diametrus rationalis, conſtans decem pedibus. Diximus enim quadratum lateris eſſe 50 hoc autem dimidium eſt quadrati, quod a diametro deſcribitur: ergo quadratum diametri eſt 100. cuius Radix quadrata, nimirum decem, conſtituit quantitatem

tatem diametri rationalis. Liquet igitur, diametrum ἀσύμμετρον & incommenſurabilem eſſe cum latere quadrati: quod non incommode demonſtrari poteſt per propoſ. penultimam libri primi Euclidis: ipſe tamen Euclides hoc demõſtrare voluit ad finem libri decimi, quod iſta proprietas ſine comparatione linearum rationalium & irrationalium, de quibus egerat libro decimo, & quod ſine tractatione numerorũ, de quibus dictum fuit libro 7. 8. & 9. plene cognoſci non poſſet. Hiſce duobus corollariis ex propoſitione penultima libri primi Euclidis confirmatis, reſtat vt oſtendamus, in linea recta rationali & irrationali non dari aliquam menſuram communem, qua vtriuſque quantitatem definire poſſimus. Quæ enim mẽſuram communem admittunt, dicuntur commenſurabilia: talia ſunt, quæ conſtant partibus, certo numero definitis: quæ igitur non habent partes, certo numero explicabiles, incommẽſurabilia nominãtur. Verbi gratia, ſi duo latera trianguli rectãguli explicentur Radice quadrata, dicũtur habere eandẽ menſurã, quę vnitate definitur: eſt enim vnitas communis menſura omnium numerorum cõmunicantium, vt Campanus ſcribit ad definitionem tertiam libri quinti Euclidis. Si autem in triangulo rectangulo latus vnum ſit commenſurabile, quod certis partibus & vnitatibus definiatur, alterum autem ſit incommenſurabile, quod certis partibus & vnitatibus definiri nequeat, hoc eſt, ſit Radix ſurda de numero

non quadrato: tunc hæc latera inter ſe comparari nequeunt, quia nec habent partes eaſdem, nec eadem vnitate diuidi poſſunt. Hinc eſt, quod Michael Stifelius lib. 2. Arithmeticæ, cap. 1. Radices ſurdas, ſiue numeros ſurdos, dicat tota natura differre a numeris veris & rationalibus: veri enim numeri, ſiue integri ſint ſiue fracti, certis conſtant partibus, Radices autem ſurdæ in infinitum diuiduntur, neque poſſunt appellari numeri integri aut fracti. Satis opinor intelligimus, quare in triangulo orthogonio aliquando latus vnum irrationale ſtatuatur, & nullis partibus comprehendi poſſit: vnde colligitur vanum eſſe ſtudium Mechanicorum, qui lineam irrationalem cum rationali comparare audent. Si enim latus aliquod in triangulo rectangulo ex ſua natura ſit incommenſurabile, Mechanici nihilominus illud dicunt eſſe commenſurabile, quatenus id per epharmoſin in iiſdem partibus metiuntur. Nec difficilis eſt huiuſmodi mechanica applicatio lineæ rectæ irrationalis ad rectam rationalem: extẽditur enim linea rationalis ſecũdum ſuas partes in directum, quouſque libet, deinde circino excipitur interuallum lineę irrationalis, & applicatur ad lineam rectam rationalẽ: partes autem interceptæ, ſiue ſint integræ, ſiue fractæ, accipiũtur pro mẽſura lineæ irrationalis. Vt ſi in triangulo rectangulo hypotenuſa ſit 10. partiũ, & proximũ latus ſit quinq; partium, tertium latus minus erit hypotenuſa: ſi igitur circino comprehendatur interuallũ

tertii

tertii lateris, & ad hypotenuſam diligentiſſime appli-
cetur, apparebit interuallum illud intercipere partes
integras octo cum ſemiſſe vnius partis & paulo am-
plius. Sed hęc applicatio, etiamſi diligentiſſima & exa-
ctiſſima habeatur, nūquam ſatisfacit ſubtilitati geo-
metricæ: quæ per certam demonſtrationem euincit,
tertium latus eſſe Radicem ſurdam de 75, numero non
quadrato, ac proinde Radicem illam ſurdā nullis par-
tibus explicari poſſe. Eodem modo abſurdum erit, ſi
quis diametrum quadrati cum latere per eandem mē-
ſuram comprehēdere conetur: quin immo ſi quadratū
aliquod proxime ad numerum quadratum accedere
videatur, non tamē Radix illius quadrati numero de-
finiri poteſt. Sit enim triangulus orthogonius, cuius
maius latus ad angulum rectum ſit octo partiū, minus
autem ſit quatuor: erit igitur quadratum hypotenuſæ
80. quod ſola vnitate differt a numero quadrato: ſi au-
tem quadratum hypotenuſæ eſſet 81. tunc vtiq; Radix
illius quadrata eſſet nouem, atq; ſic hypotenuſa con-
ſtaret nouem partibus. Si quis igitur per epharmoſin
prædictæ hypotenuſæ, cuius quadratū eſt 80. aſſigna-
ret partes nouē, quæ aſſignandæ erant Radici de qua-
drato 81. in geometriā grauiſſime peccaret. Quacunq;
igitur menſura latus irrationale definiant Mechanici,
neceſſe eſt eos in infinitas contradictiones incidere.

Tertium corollarium eſt, ſi triangulum orthogonium 3.
proponatur, cuius duo latera rectum angulum am-

plectentia,habeāt proportionem triplam, quadratum ſubtenſæ decuplum eſt quadrati,quod a minore latere circa angulum rectum deſcribitur: & quadratum maioris lateris circa angulum rectum,nonuplum eſt quadrati,a minore latere circa angulum rectum deſcripti. Inſpiciamus figuram ſuperiorem: dātur duo latera rectum angulum amplectentia,D F. & F E. minus latus ter cōtinetur in maiore: nam D F eſt ſeptem partium, cuius quadratum eſt 49. ſed F E habet partes 21, cuius quadratum eſt 441. eſt ergo inter hæc latera rectū angulum ambientia tripla proportio. Quadratum ſubtenſi lateris,ſcilicet D E,eſt 490. dico,quod huius ſubtenſæ quadratum,ſit decuplum illius quadrati,quod a latere D F deſcribitur. id quod ex diuiſione liquet: ſi enim quadratum 49. diuidatur per quadratum 490. reperiemus decem in quotiente. Sic etiam conſtat, quadratū lateris F E, eſſe nonuplum quadrati lateris D F: illius enim quadratum eſt 441. huius vero 49. minus igitur quadratum, in maiore nouies continetur. Hoc corollarium male detorſit Scaliger ad perimetrum & diametrum circuli: nam contēdit per giratione quandam & reuolutionem orbis mobilis,hypotenuſę poſſe dari æqualem circumferētiam: ac proinde quadratum perimetri circularis in rectam lineam extenſæ, decies contineri in quadrato lateris minoris circa angulum rectum,hoc eſt, in quadrato diametri. Id ſignificauit verbis iſtis,ad paginam 31. *Quadratum ab ambitu circuli*

decu-

decuplum eſt quadrati a diametro.hoc eſt,ſi ambitus circuli fiat æqualis ſubtenſæ,& diametrus eiuſdem circuli fiat latus minus circa angulum rectum, ita vt tertium latus cõtineat triplum diametri, tunc quadratum ſubtenſæ,ſiue perimetri, fore decuplum quadrati diametri, ſiue lateris minoris circa angulum rectum. Vetus hæc eſt & admirabilis phantaſia,geometrica cum mechanicis in vnum chaos permiſcens. Quid enim aliud olim ſibi voluerunt Indi, qui dixerũt, ſi diameter fuerit vnitas,circumferentiam fore radicem de quadrato decem? Sed de hac Indorum opinione plura dicemus ſub finem capitis. Vt nihil diſſimulem, apparet Scaligerum præceptionum apodicticarum parum memorem eſſe:demonſtratio enim conſtat ex iis, quæ eiuſdẽ ſunt generis & naturæ,neq; licet demõſtratori ab vno genere in aliud tranſire,ſicut prolixe docet Ariſtoteles in poſterioribus Analyticis. Quid commercii habet perimetrus circuli cum hypotenuſa trianguli orthogonii? nõ equidem video, quomodo per epharmoſin rotationis fieri poſſint æqualia,quæ ex ſua natura nullam obtinent æqualitatis mẽſuram. Notum enim eſt, lineam orbicularem cum recta non poſſe comparari: quia hæ lineæ non continentur ſub vna aliqua ſpecie indiuidua,ſeu non admittunt proportionem, quæ in vna ſpecie indiuidua conſiſtit, vt patet ex definitione proportionis, quam Euclides affert libro quinto elementorum:quemadmodum neque motus circularis,

M

neq; motus rectus comprehenditur ſub aliqua ſpecie indiuidua, vt euidēter declarat Ariſtoteles lib. ſeptimo Phyſicæ auſcultationis. Quare dici nō poteſt, circumferentiam eſſe æqualem rectæ lineæ, aut ea minorem, aut maiorem: neq; etiam dici poteſt, motum circularē eſſe æqualem motui recto, aut eo minorem, aut maiorem. Quod ſi autē nobis ſic placeret loqui, nemo profecto eſſet, qui non intelligeret, hanc impropriam eſſe locutionem: & lineā de circumferentia & recta æquiuoce prædicari: item motū de circulari & recta latione non niſi æquiuoce enunciari: quę autē ſunt æquiuoca, illa inter ſe comparari nequeunt, teſte Ariſtotele, libro 7. Phyſicorum, contextu 24. vbi ſic inquit, ἀλλ᾽ ὅσα μὴ ὁμώνυμα, ἅπαντα συμβλητά: quæ Simplicius in commentario periphraſi quadam explanat, dicens, καὶ πρῶτον λέγει, ὅτι τὰ μὴ ὁμωνύμως ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὄνομα, τὸ ταχὺ καὶ βραδὺ, ἀλλὰ δηλονότι συνωνύμως, ταῦτα συμβλητά ἐστι, τὰ δὲ ὁμωνύμως λεγόμενα, οὐ συμβλητά. Mechanici igitur animaduertere debebant, perimetrum cum hypotenuſa trianguli orthogonii non ſimpliciter, ſed ex hypotheſi conferri: ſi enim ſtatuatur, perimetrum in rectum extendi poſſe, vt æquetur ſubtenſæ triāguli orthogonii, cuius duo latera angulum rectum amplectentia habent proportionem triplam, tūc quadratum perimetri decuplum eſt quadrati diametri, quæ minori lateri circa angulum rectū conſiſtenti, æqualis eſt. Sed hanc hypotheſin nos negamus, quę dicit, perimetrum poſſe fieri ęqualem ſubtenſæ

tenſæ: etſi enim epharmoſis rotationis teſtetur de æqualitate aliqua, hæc tamen epharmoſis Geometris non ſatisfacit. Et licet ipſe quoque Archimedes talem epharmoſin comprobaſſe videatur: eam tamen pro principio geometrico nunquam habuit. In eodem cōtextu 24. lib. 7. Phyſicorum argumentatur Ariſtoteles a maiore ad minus: ſi linea recta & circumferētia, quæ maiorem habent affinitatem, non tamē poſſunt comparari, multo minus comparabitur tardum & velox cum alteratione & latione: nam recta linea & circumferentia ſunt in eodem prædicamento quantitatis, & ſunt ambo quanta continua, & ſunt ambo lineæ, alteratio autem & latio etiam prædicamentis differunt: nam alteratio pertinet ad Qualitatem, latio autē refertur ad Vbi. Simili comparatione nos poſſumus vti, ſi linea recta rationalis, & linea recta irrationalis, quæ maiorem habent cognationem, non tamen poſſunt inter ſe comparari, multo minus linea curua circumferentię, poteſt comparari cum linea recta, cum hæ inter ſe minus ſint cognatæ: nam rationalis & irrationalis continetur ſub genere proximo, ſcilicet ſub recta, ſed curuum ſeu orbiculare, & rectum, continetur ſub genere remotiore, ſcilicet ſub linea. Quod autē de linea dictum eſt, hoc etiam de ſuperficie intelligendum eſt: vt enim non omnes lineæ inter ſe ſunt comparabiles, ita neq; omnes ſuperficies: nam rectilinea ſuperficies cum rectilinea ſuperficie, & circularis ſuperficies cum

circulari ſuperficie conferenda eſt: niſi fortaſſis pars aliqua ſuperficiei circulineæ, poſſit comparari cum figura rectilinea, ſicut oſtendi poteſt per meniſcũ Hippocratis, qui pars eſt circuli, & talis meniſcus neceſſario æqualis habetur triangulo cuidã orthogonio: tota autem ſuperficies circuli non poteſt comparari cum tota ſuperficie rectilinea. Præterea notãdum eſt, quod cõparatio iſta a maiore ad minus, valde efficax ſit aduerſus epharmoſin mechanicam, qua nonnulli perimetrum cum diametro eiuſdem circuli comparãdam eſſe exiſtimant: ſi enim epharmoſis nõ poteſt definire quantitatem omnium linearum rectarum, quæ inter ſe magis vidẽtur comparabiles, multo minus definiet quantitatem lineæ circularis & rectæ, quæ minus videntur comparabiles. Quod autem nulla epharmoſis poſſit exprimere quantitatem lineæ rectæ irrationalis, id ex proprietate trianguli orthogonii ſatis conſtat: cauſa in eo cõſiſtit, quod vt numeri non quadrati Radix certis partibus definita aſſignari nequeat, ita etiam in linea irrationali non poſſint vltimæ partes inueſtigari: nam diuiſio lineæ irrationalis, perinde & diuiſio Radicis non quadratæ, in infinitum procedit: quod illi probe nouerũt, qui tractationẽ numerorum Algebræ didicerunt. Huic corollario ſimile eſt illud, ſi triãgulus rectangulus conſtituatur, cuius latera rectum angulũ amplectentia habeant proportionẽ duplam: tunc ſubtenſæ quadratum erit quintuplum quadrati, a minore

latere

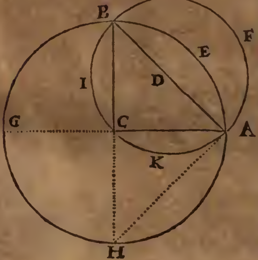
latere deſcripti: & quadratum maioris lateris erit quadruplũ quadrati, a minore latere deſcripti. Verbi gratia, maius latus circa angulum rectum ſit octo partiũ, & minus ſit quatuor partium: ſubtenſæ igitur quadratũ erit 80. quod quintuplum eſt quadrati 16. a minore latere deſcripti: & quadratum maioris lateris erit quadruplũ quadrati 16. quod a minore latere deſcribitur.

Quartum corollarium eſt, in triangulo rectangulo 4.
iſoſcele, quæcunq; figura ad hypotenuſam deſcribitur, dupla eſt figuræ ſimilis, & ſimiliter deſcriptæ, ad latus alterutrum circa angulum rectum conſiſtẽs. Hoc corollarium hic inſerimus, vt oſtendamus, quomodo lunula Hippocratis, æqualis ſit triangulo rectangulo iſoſceli, cuius hypotenuſa eſt latus quadrati circulo maiori inſcriptũ: etſi enim Simplicius & Philoponus exiſtiment, Hippocratẽ Chium ex propoſitione ſecunda libri duodecimi elementorum Euclidis inueniſſe, lunulam aliquã æquari poſſe triãgulo alicui rectangulo, ego tamen cenſeo occaſionẽ huius inuenti dimanaſſe ex propoſitione penultima libri primi, & ex propoſitione 31. libri ſexti elemẽtorum Euclidis. Nam propoſitio penultima libri primi explicat, in omni triangulo rectangulo figuram quadratam ad latus ſubtenſæ deſcriptam, æqualem eſſe duabus figuris quadratis, quæ ad reliqua duo latera deſcribuntur: vnde etiam ſequitur, figuram quadratam ſubtenſæ trianguli rectanguli iſoſcelis, duplam eſſe figuræ quadratæ, quæ ad alteru-

trum latus deſcribitur. Propoſitio autẽ trigeſima prima libri ſexti dicit, hoc in genere verum eſſe de quacunque ſpecie figurarum, & rectilinearum & curuilinearum, ſi modo ſimiles ſint & ſimiliter deſcribantur, quemadmodum bene obſeruauit Campanus: vult enim propoſitio iſta, in triangulis omnibus rectangulis figuram quamcunq; ad latus ſubtenſum angulo recto deſcriptam, æqualem eſſe duabus reliquis figuris ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ad reliqua latera. Vnde etiã ſequitur, figuram quamcunq; ſuper hypotenuſa trianguli rectanguli iſoſcelis deſcriptam, duplam eſſe figurę ſimilis, & ſimiliter deſcriptę ſuper latere alterutro. Verba propoſitionis hęc ſunt, Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις, καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Quæ autem figuræ rectilineæ ſint ſimiles, & quæ ſimiliter deſcribantur, oſtendit Euclides in 1. definitione libri ſexti elementorum: quando inquit, ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς, ἀνάλογον. hoc eſt, ſimiles figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera circa æquales angulos, proportionalia. Idem etiã dici poteſt de figuris curuilineis: nam harum quoq; aliquę & angulos ſimiles, & latera habent ſimiliter atq; proportionaliter deſcripta: quemadmodum cernere licet in partibus duorum circulorum, duplam proportionem habentibus.

Venia-

Veniamus igitur ad propoſitum: ſit triãgulus rectangulus & iſoſceles A B C cuius ſubtenſa ſit decem partium. & deſcribatur circulus ex centro C, vt circumferẽtia eius attingat punctum A & B. Deinde diuidatur



latus ſubtenſum A B bifariã in puncto D. & ex D centro circulus deſcribatur, cuius circumferẽtia attingat extremitates trianguli iſoſcelis ABC. coniungatur etiam punctum A & H in vnam rectam. & latera trianguli iſoſcelis extendantur ad circumferẽtiam circuli, vt duæ diametri conſpiciantur, quę diuidunt totum circulum in quatuor æquales quadrantes. Iam dico, maiorem circulum duplum eſſe minoris, & ſemicirculum maiorẽ duplum eſſe ſemicirculi minoris: quod ſic oſtenditur: figura A E B ad hypotenuſam deſcripta, dupla eſt figura B I C. ſimilis & ſimiliter deſcriptę, ad latus alterũ, per propoſitionem trigeſimam primam lib. 6. elem. Euclidis. Atqui figura A E B. eſt ſegmentum circuli maioris, & figura B I C. eſt ſegmentum circuli minoris. quare ſegmentum maius duplum eſt minoris: patet etiam, ſi ambo ſegmenta minora, videlicet B I C.

& A K C.coniungãtur,ea fore æqualia maiori ſegmē-to A E B. Vt autem ſe habent quadrata diametrorum, ita ſe habent ipſi circuli, per propoſitionem ſecundam libri duodecimi Euclidis: atqui quadratum diametri circuli maioris duplum eſt quadrati diametri circuli minoris, & contra, quadratũ diametri circuli minoris dimidiũ eſt quadrati diametri circuli maioris, per propoſ.penult.libri 1.Euclidis. Poſuimus enim hypotenuſam trianguli rectanguli & iſoſcelis cõtinere partes 10: hæc aũt hypotenuſa facta eſt diametrus circuli minoris: quare quadratũ huius ſubtēſę, ſiue diametri A B. eſt 100: & eodē modo quadratũ lineæ A H eſt 100: ſi iã hęc duo quadrata coniungãtur, producitur quadratũ ſubtēſę B H, ſiue diametri maioris circuli, atq; hoc cõtinet 200. Cum igitur manifeſtum ſit, quadratum diametri in minore circulo eſſe 100, & quadratum diametri in maiore circulo eſſe ducenta: ſequitur quod circulus maior ſit duplus minoris: & ſic quęlibet aliæ partes bifariam diuiſæ in maiore circulo, duplę ſunt partiũ bifariam diuiſarum in minore circulo: quod de ſemicirculis & quadrantibus inprimis intelligendum eſt. Ex hoc conſtat, quadrantem circuli maioris duplum eſſe quadrantis ſemicirculi minoris, ac proinde totum ſemicirculum minorem æqualē eſſe quadrãti circuli maioris. Habemus igitur proximũ medium, per quod demonſtrandum erit, lunulam A F B E. æqualem eſſe triãgulo rectãgulo & iſoſceli ab initio propoſito. Quod hac

methodo

methodo oſtendẽdum eſt: ambo ſemicirculi in minore circulo ſunt ſibi inuicem æquales: ſi autem æqualia ab æqualibus vtrinque auferantur, remanentia ſunt æqualia, per communẽ animi conceptionem. Segmẽtum A E B. in ſemicirculo dextro, æquale eſt duobus ſegmentis in ſemicirculo ſiniſtro deſcriptis, vt antea fuit demonſtratum: auferamus igitur vtrinq; æqualia, nimirum a ſemicirculo dextro demamus ſegmentum A E B. & a ſemicirculo ſiniſtro ſubtrahamus duo ſegmenta B I C. & A K C. quæ æqualia ſunt ſegmento A E B. vtiq; figuræ quæ relinquentur, inter ſe erunt æquales: videlicet lunula A F B E. æqualis erit triangulo rectangulo iſoſceli A B C. quod ad demonſtrandum erat propoſitum. Hæc demonſtratio a veteribus accepta refertur Hippocrati Chio, quẽ Ariſtoteles ſcribit circulum quadrare voluiſſe per meniſcos: eandem demonſtrationem inuenimus apud Simplicium libro 1. Phyſicorum, ad contextum 11. & apud Philoponum libro primo Poſteriorum, contextu 67. Etſi autẽ Hippocrates inuenerit artificium maximum, non tamen per illud potuit circulum quadrare: hac enim ratione ſolum quadratũ circulo inſcriptum, oſtenditur æquale eſſe quatuor meniſcis, qui fiunt ex ſemicirculis in lateribus quadrati deſcriptis: reliqua autem quatuor ſegmenta circuli nõ poſſunt ad huiuſmodi meniſcos reduci, qui æquales ſint triangulis. Immo ſi hexagonum æquilaterum circulo inſcribatur, oſtendi quidẽ poteſt,

ſemicirculos deſcriptos ex lateribus hexagoni, dimidios eſſe ſemicirculorum, qui a lateribus quadrati deſcribuntur. Cuius rei indiciũ eſt ex ſuperiore ſchemate: nã ſemicirculus B F A. dimidius eſt ſemicirculi B G H. quia ille deſcribitur a latere A B trianguli rectanguli iſoſcelis A B H. hic vero deſcribitur ab eius hypotenuſa B H. Sic etiam ſemicirculus, qui deſcribi poteſt a latere A C. vel B C. trianguli rectanguli iſoſcelis A B C. dimidius eſt illius ſemicirculi, qui a ſubtẽſa A B. deſcribitur. Atqui cõſtat lineã A C. vel B C. eſſe ſemidiametrũ, ſiue latus hexagonicum: certũ etiã eſt, quod ſubtẽſa A B. ſit latus quadrati circulo inſcripti: vnde manifeſtum eſt, ſemicirculũ a latere hexagonico deſcriptũ, dimidiũ eſſe eius ſemicirculi, qui a latere quadrati deſcribitur. Hoc enim vniuerſaliter verum eſt: quæcunq; figuræ ſimiles ſunt & ſimiliter deſcribuntur ab hypotenuſa & ab altero latere in triãgulo rectangulo iſoſcele, duplam inter ſe habẽt proportionem. Vidimus hactenus, quomodo ſuperficies curuilinea meniſci ęquari poſſit triangulo rectilineo: ſed id quadratoribus circuli nihil patrocinatur. Reuertamur igitur ad recẽtiores mechanicos, qui exiſtimant, quadratum perimetrĩ decuplum eſſe quadrati a diametro deſcripti: & videamus: qualem proportionem inter diametrum & circumferentiam circuli explicent. Volunt noui mechanici, accipiendam eſſe diametrum cuiuſcunq; circuli, & ex ea quadratum deſcribendũ: deinde hoc quadratũ decu-

decuplandum, eiuſq; Radicem ſiue latus eſſe æquale perimetro eiuſdem circuli. Verbi gratia, ſi detur circulus, habens diametrum quatuor partium, quadratum illius erit 16. quod ſi decupletur, ſuggerit quadratũ 160. cuius latus putant æquale eſſe perimetro. Item ſi circulus proponatur, qui habet diametrum 16. partium, quadratum illius erit 256. ſicut ex tabula tetragonica Ioãnis Antonii Magini ſine vllo labore eruitur: id autem quadratum ſi decupletur, per Nullam, vt vocant, in fine adiectam, exhibet quadratum 2560. cuius Radicem dicũt æqualem eſſe perimetro. Quia vero operoſum eſt, quadratum diametri decuplatum in figura geometrica oſtendere, excogitarunt Mechanici compendium, quod obſeruari volunt. Dicunt autem diametrum circuli diuidendam eſſe in partes 16. æquales, & triangulum orthogoniũ conſtituendũ, cuius maius latus ad angulum rectum cõtineat partes 12. diametri, latus autem minus ad angulum rectum complectatur partes quatuor diametri: ex his enim duobus lateribus ſubtẽſam fore Radicem de quadrato 160. atque huius ſubtenſæ longitudinem quater contineri in longitudine perimetri. Cur autem huiuſmodi triãguli orthogonii ſubtenſa quadrupla accipi debeat pro longitudine perimetri, cauſa hæc eſt: quia quadratum diametri, in ſedecim partes æquales diuiſæ, eſt 256. quod ſi decupletur, eſt 2560. at in hoc quadrato a diametro producto & decuplato continetur ſedecies quadratum ſub-

tenſæ 160.cum igitur Radix de 16 ſint quatuor, oportebit ſubtenſam quadruplam accipere, pro longitudine perimetri. Idem compendium in minimis terminis ſic poteſt explicari: diuidatur diametrus circuli in quatuor partes æquales, & fiat triangulum orthogonium in circulo vel extra circulum, cuius maius latus ad angulum rectum cõtineat tres partes diametri, & minus latus circa angulum rectum cõplectatur partem vnã: ex his igitur datis duobus lateribus ſubtenſa erit Radix de quadrato 10. huius autem ſubtenſæ longitudo quadrupla erit accipiẽda pro longitudine perimetri. Nam quadratũ diametri, in quatuor æquales partes diuiſæ, eſt 16. quod ſi decupletur, fit 160. atqui quadratũ ſubtenſæ, ſcilicet 10. ſedecies continetur in quadrato diametri decuplato: quare ſubtenſæ quantitas quadrupla accipienda erit pro longitudine perimetri. Vide Scaligerum in cyclometricis, pagina 38. & 39. In hiſce compendiis nihil aliud, quam vanum nouitatis ſtudiũ conſpicio. Itane doctiſſimi Geometræ, delitiæ humani generis, antiquitate & ſplendore familiæ nobilitati, ſentiendum eſſe exiſtimatis? quocũque vos vertitis, ſemper aliquid nouum ſciſcitis, vnde captus veſter in geometricis cognoſci poſſit. Non eſt opus vllis ambagib. ſi communem practicorum ſententiam, quam Archimedi adſcribunt, ſequi velimus. Archimedes itaq; tradidit nobis facilimũ modum, in quo acquieſcere poſſumus: ſi enim habeamus diametrum circuli, ex ea facimus

cimus latus minus circa angulum rectum, ex triplo autem diametri componimus maius latus circa angulũ rectũ in triãgulo orthogonio: & quæ hinc producitur ſubtenſa, eam dicimus proxime reſpondere perimetro circulari. Etſi autem fere omnes practici inter Arabes, Latinos, & Græcos, modum Archimedis ſic declarare voluerint, quemadmodum teſtatur Georgius Purbachius in principio compoſitionis tabularum ſinuum, & nos hoc ipſum auctoritate Auerrois, Alfragani, Procli, Philoponi, & Theonis confirmauimus: ſciendum tamen eſt, quod practicorum ſententia caſtigationem aliquam admittat. Non enim Archimedes voluit, circumferentiam in rectum extenſam eſſe præciſe triplã cum vna ſeptima diametri, ſed dixit, veram perimetri quantitatem eſſe minorem quam $3\frac{10}{70}$. maiorem vero quam $3\frac{10}{71}$. reſpectu diametri vnius partis, idque demõſtrauit Archimedes per duas figuras *96*. angulorum, quarum circumſcripta minor eſt quam $3\frac{10}{70}$. inſcripta vero maior quam $3\frac{10}{71}$. ſicut mihi coram expoſuit Clariſſimus vir, D. Adrianus Romanus, quando huc ſe cõtulit, vt Profeſſores Academię noſtrę ſalutaret, id quod factũ eſt inter feſta natalitia noui & veteris calendarii, labente anno Domini 1594. Purbachius idem teſtatur hiſce verbis, *Magiſtri geometriæ non potuerunt perfecta ratione comprehẽdere, quanta eſſet diameter circuli reſpectu ſuæ circumferentiæ, eo quod recti ad curuum nõ eſt proportio. Practici tamen poſuerunt circumferentiam triplam*

ſeſquiſeptimam diametro. Archimedes autem probat circumferentiam continere ter diametrum, & minus quam decem ſeptuageſimas, & plus quam decem ſeptuageſimas primas. Hæc Archimedis demonſtratio non eſt tyrannica, nec ita inepta, vt a quoquã eludi debeat. Ex prædictis igitur colligimus, hanc eſſe communem practicorũ rationem, vt ſubtenſa trianguli orthogonii (cuius latus minus ad rectum angulum ſit diametrus, alterũ vero latus ſit triplum diametri) habeatur æqualis perimetro: hæc enim hypotheſis occaſionẽ præbuit, vt per datam ſubtenſam, quæ æqualis videretur perimetro, & per diametrum, area circularis indagaretur, vt patet ex teſtimoniis præſtantiſſimorum auctorum, quæ ſupra attulimus. Quod ad longitudinem perimetri attinet, eam Indi paulo accuratius, quã practici vulgares definire voluerunt: proinde dixerunt, quadratũ perimetri decuplũ eſſe quadrati a diametro producti. Cũ enim triangulum orthogonium ex communi practicorum ſententia conſtituiſſent, cuius minus latus ad angulum rectum eſſet diametrus, maius autem latus circa angulum rectum cõtineret triplum diametri, ex his duobus poſitis lateribus viderunt hypotenuſam procreari, cuius quadratum decuplum eſſet reſpectu quadrati a diametro producti. Quia vero animaduerterunt, Radicem iſtius hypotenuſæ ſurdam eſſe, nec certo numero poſſe explicari, idcirco putarunt Indi conſultius eſſe, ſi ſola quãtitas hypotenuſæ acciperetur

pro

pro longitudine perimetri, quam ſi ex proximo quadrato Radix rationalis extraheretur, prout communiter practici facere ſolent. Hoc perſpicue colligimus ex verbis Purbachii in loco citato exſtantibus, vbi ſic ſcribitur: *Indi vero dicunt, ſi quis ſciret Radices numerorum recta radice carentiũ inuenire, ille faciliter inueniret, quãta eſſet diameter reſpectu circumferentiæ. Et ſecũdum eos, ſi diameter fuerit vnitas, erit circumferentia Radix de decem: ſi duo, erit Radix de quadraginta: ſi tria, erit Radix de nonaginta, & ſic de aliis. Et eſt differentia inter Indos & practicos geometriæ vnum minutum, & plus quã ſeptima pars vnius minuti.* Vult Purbachius dicere, quod Indi exiſtiment, perimetrum circuli eſſe æqualem hypotenuſæ trianguli orthogonii, cuius minus latus ad angulum rectum ponatur diameter, maius autem latus circa eundem angulum rectum ſit triplum diametri: quia autem hypotenuſa eſt Radix numeri recta radice carentis, hoc eſt, quia hypotenuſa eſt Radix ſurda de numero non quadrato, hæc vtique certo numero definiri nequit: ſi quis igitur ſciret extrahere Radicem ſurdam, hic certo quantitatem perimetri exprimeret. Sed impoſſibile eſt, vt Radix ſurda definito numero exprimatur: quare ſi perimetrus æqualis eſt Radici ſurdæ ipſius hypotenuſę, recte illi facere videntur, qui pro longitudine perimetri capiunt ſolius ſubtenſæ quantitatem. Deinde affirmat Purbachius, Indos exiſtimare, quod quadratum perimetri ſit decuplum quadrati a

diametro producti: ac proinde dicunt, ſi diametrus ſit vnitas, perimetrum fore Radicem ſurdam de numero nō quadrato, videlicet de denario: ſi autem diametrus cōtineat duo, tunc quantitatem perimetri fore Radicem ſurdam de quadraginta, &c. quemadmodum ex ſententia Archimedis & practicorum dicimus, ſi diametrus fuerit partium ſeptem, tunc perimetrum eſſe Radicem ſurdam de numero non quadrato 490. Tandem indicat Purbachius, Indos videri accuratius exponere perimetrum, quam vulgo faciant practici geometriæ: volunt enim Jndi perimetrum præciſe æqualē eſſe ſubtenſæ, & cum hęc ſubtenſa ſit Radix ſurda, eam non eſſe numero inueſtigandam, ſed ſimpliciter quātitatem ſubtenſæ capiēdam eſſe pro longitudine perimetri: practici autem ſatis eſſe exiſtimant, ſi Radix extrahatur ex numero proxime quadrato, eaq; pro quātitate perimetri capiatur. Sic quidem olim ſenſerunt Jndi, quorum opinionem nuper reuocauit Scaliger: ſed error maximus eſt in hypotheſi: non enim concedendum eſt, per rationis epharmoſin perimetrū ęqualem fieri hypotenuſę dati trianguli orthogonii. Notādum igitur eſt, demonſtrationem hanc ſcientificā eſſe, quæ dicit, quadratum ſubtenſæ in triangulo orthogonio (cuius latus minus circa rectum angulum ſit partiū ſeptem, maius autem ſit partium viginti & vnius) decuplū eſſe quadrati, quod a minore latere deſcribitur: ac proinde ſi diametrus circuli æqualis ſit lateri minori

circa

circa angulum rectum conſiſtēti, ſequetur quod quadratum hypotenuſæ etiam decuplū ſit quadrati a diametro deſcripti. Quod autē a Mechanicis aſſumitur, perimetrum circuli ſic in rectum poſſe extēdi, vt prorſus æqualis ſit hypotenuſæ, id falſum eſt: licet enim per extenſionem mechanicam perimetrus aliquo modo fiat æqualis ipſi hypotenuſę, non tamē omnino æqualis fieri poteſt. Agnoſcant ergo recētiores Mechanici, quod in ratiocinando plurimū fallantur: ſic enim colligunt, Omnis hypotenuſa a duobus lateribus rectum angulum amplectentibus, & triplam habentibus proportionē genita, habet quadratum decuplū, reſpectu illius quadrati, quod a minore latere circa angulū rectum deſcribitur: at omnis perimetrus circuli poteſt fieri talis hypotenuſa, Ergo omnis perimetrus quoque habet quadratum decuplum reſpectu illius quadrati, quod a minore latere circa angulum rectum deſcribitur, hoc eſt, reſpectu quadrati, quod a diametro deſcribitur, quādoquidem minus latus circa angulum rectū ponitur æquale diametro. In hoc ſyllogiſmo maior eſt certiſſima. ſed minor probatione eget: confugiunt autem Mechanici ad epharmoſin rotationis, vt fidem aliquam faciant dubiæ propoſitioni: at ne ſic quidem ad ſcopum optatum perueniunt, vt nos in præcedentibus abunde declarauimus.

Quid ſentiendum ſit de epharmoſi geometrica, vnde applicatio curui ad rectum fluxiſſe videtur.

CAPVT VIII.

QVi circulum quadrare cupiũt, poſtulatum quoddam mechanicum ſtatuũt, ex quo perſuadere conãtur, lineam curuam poſſe applicari rectæ, ita vt vna alteri æqualis habeatur. Poſtulatum iſtud in hanc ſententiam concipiunt. *Circumferentia poteſt æquari lineæ rectæ, ſi præparetur rota mobilis, circulo æqualis, quæ ab vno puncto circumferentiæ in planum iuxta lineam rectam extẽdatur, donec ad idem punctum redeat: hoc enim interuallum a rota mobili in ſuperficiem planam extẽſum, æquale eſt circumferentiæ circuli.* Vide Scaligerum in cyclometricis, pagina 20. Quod epharmoſis iſta nõ abhorreat a principiis geometriæ, Mechanici hinc probare vidẽtur: quia Euclides inter principia geometriæ hoc refert, quod quę ſibi mutuo applicentur, inter ſe ęqualia habeãtur: verba eius hæc ſunt, καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Verbi gratia, ſi quis lineam vnam alteri ſuperponat, ita vt nec exceſſus nec defectus in longitudine conſpiciatur, tunc ambæ lineæ dicuntur æquales, per applicationem ſiuę per epharmoſin. Item ſi quis angulum angulo ſuperponat, vt eadẽ inclinatio appareat, tunc etiam ambo hi anguli inter ſe æquales erunt, per applicationem quandam externam. Idem dici poteſt de mutua applicatione ſuperficierũ: ſi enim triangulus triangulo ſuperponatur, vt nec latera, nec anguli ſe inuicem excedant, tunc triangulus triangulo æqualis cenſetur per epharmoſin. Et ſi circulus circulo

ſuperponatur, vt circumferentia vnius non excedat circumferentiam alterius, tunc etiam circuli æquales æſtimantur propter applicationē. Obſeruandum autē eſt, Mechanicos putare, eādem eſſe rationem applicationis, ſiue lineæ rectæ beneficio regulæ aut circini inter ſe applicentur, ſiue etiam curuę lineæ per giratione & reuolutionem in planum extendātur: qua in re eos plurimum falli, oſtendemus. Non eſt dubium, quin epharmoſis locum habeat in praxi geometrica: pleriq; enim veterum propoſitionem quartam & octauam libri primi elementorum Euclidis, per applicationem mutuam linearum, angulorum & figurarum, probare ſtuduerunt. Hoc autem nulla cogente neceſſitate fecerunt: ſi enim omnem intermiſiſſent applicationem, nihilominus demonſtrare potuiſſent linearum, angulorum, & figurarum ęqualitatem, vt apparet ex recentiorum demonſtrationib. in quibus nulla epharmoſis adhibetur. In tyronum igitur rudiorum gratiam, veteres geometræ voluerunt quartam & octauam propoſitionem libri primi Euclidis, demonſtrare per epharmoſin, ſiue inductionem quandam ſenſilem: vt ſcirēt diſcipuli quaſi ſenſibus edocti, duos triangulos omnino æquales eſſe, qui & latera æqualia & angulos inuicem haberent ęquales. Jdcirco Proclus lib. 3. commentariorum in primum Euclidis ſcribit, epharmoſin eſſe ſenſilem probationem. Verba eius hęc ſunt, καὶ γὰρ ἡ ἐφαρμογὴ, καὶ ἡ ἀπὸ ταύτης ἰσότης δεικνυμένη, παντάπασιν ἔχεται τῆς

αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ὑπολήψεως, hoc eſt, applicatio enim, & quæ per eam oſtenditur æqualitas, omnino pendet a ſenſili & euidente opinione. Si autem naturã demonſtrationis reſpiciamus, certum eſt, quod debeamus adhibere medium vniuerſale: ſic dicimus, lineas duas rectas æquales eſſe, quia iiſdẽ terminis finiuntur, & duos angulos rectilineos æquales eſſe, quia eandem habent linearum inclinationem: item dicimus duos triangulos æquales eſſe, quod habeãt latera lateribus æqualia, & angulos angulis inuicem æquales. Sed vt recte percipiamus, quatenus epharmoſis probet æqualitatem, & quo vſque ſe extendat: ante omnia ſciendum eſt, in epharmoſi plurimos errores contingere poſſe, ſi lineæ ad lineas, anguli ad angulos, & ſuperficies ad ſuperficies negligenter accommodentur. Quod ſi autem diligens & accurata applicatio fiat, probabitur quidem lineas, angulos, & ſuperficies ſibi inuicem ſuperpoſitas æquales eſſe, ſed mens noſtra non acquieſcet in illa externa applicatione, niſi cauſam vniuerſalem æqualitatis intellexerit. Proinde dicimus, lineas æquales eſſe, quod æqualibus terminis comprehendantur, & angulos æquales eſſe, quod fiant ab æquali linearum inclinatione: item ſuperficies æquales eſſe, quod æqualibus lineis & angulis contineantur. Linearũ quidem ęqualitatem metimur per applicationẽ circini aut regulæ, ſed æqualitatem angulorum æſtimamus a ſubtenſis lateribus, ſicut totam ſuperficiem cum tota ſuperficie

per

per applicationem æqualium laterum & angulorum comparamus. Quare recte ſcribit Proclus libro tertio commentariorum in primum elementum Euclidis, quod omnis linea recta ad rectam cõgruat, quatenus vtriuſq; extremitates communi menſura comprehẽdi poſſunt, quodque angulus rectilineus cum angulo rectilineo, & ſuperficies rectilinea cum ſuperficie rectilinea ſit applicãda: ſi enim quantitates diuerſæ ad ſe inuicem applicarentur, nulla poſſet inueſtigari ratio æqualitatis. Verba eius hæc ſunt. Πᾶσα γὰρ εὐθεῖα ἐπὶ πάσης εὐθείας ἐφαρμόττει· τῶν δὲ ἴσων καὶ κατὰ τὰ πέρατα γίγνεται ἡ ἐφαρμογή. γωνία δὲ ἴση γωνίᾳ λέγεται ἡ εὐθύγραμμος τῇ εὐθυγράμμῳ, &c. τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ληψόμεθα κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν πλευρῶν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁμοειδῶν, οἷον τῶν μηνοειδῶν, τῶν ξυστροειδῶν, τῶν ἀμφικύρτων· ἐπεὶ δυνατὸν καὶ ἴσας εἶναι γωνίας, καὶ μὴ ἐφαρμόττειν ἀλλήλαις τὰς πλευράς. ἴση γάρ ἐστιν ἡ ὀρθὴ μηνοειδεῖ τινι γωνίᾳ, καὶ ἀδύνατον ἐφαρμόσαι ταῖς πλευραῖς τὰς περιφερείας. hoc eſt, omnis enim recta omni rectæ congruit: quæ autem ſunt æqualia, eorum etiam ſecundum terminos fit applicatio. Sed angulus angulo æqualis dicitur, ſcilicet rectilineus rectilineo. &c. Æqualitatem autem angulorum capiemus ſecundum applicationem laterum, in rectilineis, & in aliis eiuſdẽ ſpeciei figuris, vt in lunaribus, Xyſtricis & vtrinq; gibboſis: quoniam fieri poteſt, vt æquales ſint anguli, nec tamẽ latera ſibi inuicem congruant: etenim rectus angulus ęqualis eſt alicui lunari angulo: & fieri non poteſt, vt circumferẽtiæ congruant ad lineas rectas. Ex quibus verbis Procli

animaduertere licet, illa tantum admittere epharmoſin geometricam, quæ eiuſdem ſint ſpeciei: ſic linea recta cum recta, & curua cum curua, & ſuperficies rectilinea cum rectilinea applicatur: recta autem cum curua congruere nequit. Et paulo poſt idem Proclus loquens de demõſtratione per epharmoſin quartæ propoſitionis libri primi Euclidis, ſic ſcribit: Ἄρα ἡ ἰσότης ἐν ὁμοειδέσιν ὀφθεῖσα τῆς ὅλης ἀποδείξεως αἰτία ἀνεφάνη. δύο γάρ ἐστιν ἐνταῦθα ἀξιώματα συνεκτικὰ τῆς συμπάσης μεθόδου τοῦ προκειμένου θεωρήματος, ἓν μὲν, ὅτι τὰ ἐφαρμόζοντα, ἴσα ἀλλήλοις: τοῦτο ἁπλῶς ἀληθὲς, καὶ οὐδὲ ἑνὸς προσδιορισμοῦ δεόμενον, ᾧ χρῆται ὁ στοιχειωτὴς, ἐπί τε τῆς βάσεως, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν, ταῦτα γάρ φησι, διότι ἐφαρμόζει, ἴσα ἀλλήλοις. τοῦτο δὲ οὐκ ἐπὶ πάντων ἀληθὲς, ἀλλ' ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν. ὁμοειδῆ δὲ ταῦτα λέγω, οἷον εὐθεῖα εὐθείᾳ, περιφέρεια περιφερείᾳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ γωνίαι ὑπὸ ὁμοίων ὁμοίως κειμένων περιεχόμεναι, δεύτερον δὲ, ὅτι τὰ δεδομένα ἴσα, ἐφαρμόζει ἀλλήλοις. hoc eſt, Æqualitas igitur, quæ in quãtitatibus eiuſdem ſpeciei cõſpicitur, totius demõſtrationis cauſa exſiſtit. Duo enim hic ſunt axiomata continentia totam methodũ propoſiti theorematis: Vnum quidẽ eſt, quod quæ ſibi inuicem congruunt, æqualia habeantur: idq; ſimpliciter verum eſt, neq; opus habet vlla declaratione, quo vtitur auctor elementorum, in baſi, & area, & reliquis angulis: hæc enim inquit, quia ſibi inuicẽ congruunt, ęqualia ſunt. Hoc autem non de omnibus verum eſt, ſed de quantitatibus eiuſdem ſpeciei: eiuſd em autem ſpeciei hęc voco, vt eſt recta cum recta, circumferentia cum circumferentia eiuſdem circuli, & anguli com-

comprehenſi a lateribus ſimilibus ſimiliter poſitis. Alterum eſt, quod data æqualia, ſibi inuicem congruãt. Hactenus Proclus, qui expreſſe fatetur, epharmoſin geometricam tantum pertinere ad quantitates eiuſdẽ ſpeciei: ſed obſeruandum eſt, non ſemper in quantitatibus eiuſdem ſpeciei, per epharmoſin probari æqualitatem, niſi quantitates illæ etiam contineantur ſub aliqua ſpecie indiuidua, quæ in plures ſpecies ſecari nequeat: quemadmodum colligitur ex libro 7. Phyſicæ auſcultationis, & ex propoſ. penultima libri 1. elemen. Euclidis. Quamobrem licet diametrus quadrati & latus quadrati, ſint lineæ rectæ, non tamẽ per epharmoſin vllam poſſunt exæquari: idem dicendum eſt de reliquis lateribus rectis, quę ſunt rationalia & irrationalia in triangulo rectangulo. Huc vſq; ergo ſe extendit epharmoſis geometrica in applicandis quãtitatibus eiuſdem ſpeciei: ſed Mechanici plures modos applicandi excogitarunt: quantitates enim diuerſarum ſpecierum, & naturis inter ſe maxime pugnantes, per epharmoſin conciliare voluerũt. Hinc factum eſt, vt minores portiones circumferentię pro rectis lineis putarent accipiendas: qui modus ἀγεωμέτρητος eſt, & ab omnibus Philoſophis damnatus. Propterea ſcribit Simplicius, ἀδύνατον εἶναι, εὐθεῖαν ἐφαρμόσαι περιφερείᾳ. hoc eſt, impoſſibile eſſe, vt linea recta congruat ad circumferẽtiam. Cuius rei hæc eſt ratio, quia quęlibet portio circumferentię, etiam minima, recta fieri nequit: & hac ratione ve-

riſſime dicitur, ex rotunda linea nunquam effici rectā. Alii epharmoſin rotationis multo abſurdiorem introduxerunt, quia non tantum rectam lineam cum circumferentia ratione longitudinis compararūt, verum etiam lineam rectam in plano iacētem & quieſcentē, cum circumferentia in orbem volutata exæquarunt: atq; ſic ex motu phyſico quantitatem continuam metiendam eſſe cenſuerunt. Notādum autem eſt, epharmoſin rotationis duobus modis fieri: vel enim linea recta ponitur, a cuius medio per filum aliquod vtrinq; reflectitur circumferentia, donec extremitates lineæ rectæ attingat: poteſt etiam filum æneum ad circumferentiam totā applicari, vt deinde fili vna extremitas accommodetur ad vnam extremitatem lineæ rectæ, idemq; filum reflectatur, donec eius altera extremitas perueniat ad alteram extremitatem lineæ rectæ: quod vbi factum fuerit, putatur linea recta congruere ad circumferentiā. Hic modus perinde ſe habet, ac ſi regula aliqua flexibilis primo in rectum extēderetur, & deinde in circumferentiam curuaretur, aut contra. Alter modus rotationis eſt, quando accipitur orbis mobilis, qui in certo puncto applicatur ad extremitatem lineæ rectæ, & tam diu reuoluitur, donec ad idem punctum redeat. Sane vterq; rotationis modus alienus eſt a geometria: cum præſupponat, ſingula puncta circūferentiæ æquari ſingulis punctis lineę rectę. Hoc autē prorſus falſum eſt: quia minimum punctum circumferētię

in

in oculos incurrens, ſua natura curuum eſt,vt ad punctum lineæ rectæ applicari nequeat. Ex his omnibus apparet, Mechanicos plurimũ abuti epharmoſi geometrica,quando lineam rectam rationalem cum irrationali per applicationem vnam & eandem comprehendi poſſe exiſtimant. Nec minus decipiuntur mechanici,quando lineam rectam cum curua comparare volunt:quocunq; enim modo applicationis vtãtur, in manifeſtas cõtradictiones incidunt. Similiter aberrãt mechanici,quando ſuperficiem circularem cum rectilinea, per multiplicem ſpatiorum diuiſionem æquare conantur: hi enim terminum diuiſionis ſtatuunt in aliquo puncto ſenſili, quod in infinitum diuidi poteſt. Porro monẽdum eſt, haud parũ decipi curioſos quoſdam verborum magiſtros,qui exiſtimãt ſolam epharmoſin Antiphõtis appellandam eſſe τεμαχισμὸν, hoc eſt, diſſectionem: cũ in vniuerſum omnis epharmoſis per diſſectionem & linearum & ſuperficierum propoſito ſuo fidem facere velit. Ex Themiſtio lucidiſſimo philoſopho diſcimus, τεμαχίζειν idem eſſe, quod in fruſta ſecare: nã libro 1. Poſt. Analyticorum cap. 5 ſic loquitur. οὐ γὰρ ἔστιν ὄνομα κοινὸν, οὔτε φύσις τις ἀνωτέρα ἀριθμοῦ καὶ μεγέθους καὶ χρόνου, ἐφ' ἧς δύναται τοῦτο καθόλου ὑπάρχον ἀποδειχθῆναι. καθόλου μὲν γὰρ ἀληθὲς, ἐάν τινα ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον εἶναι. οὐκ ἔχοντες δὲ ὑποθεῖναι τῷ τινὰ, ὄνομα κοινὸν ἀφωρισμένον, τεμαχίζουσι τὴν ἀπόδειξιν, καὶ οἴονται καθόλου δεικνύναι ἐφ' ἑκάστου τῶν εἰρημένων, οὐ δεικνύντες οὕτως. οὔτε γὰρ ᾗ ἀριθμὸς, οὔτε μέγεθος, οὔτε χρόνος, ἀποχρῶνται εἰς ἀπόδειξιν. hoc eſt, non enim eſt nomen com-

mune, neq; natura aliqua ſuperior numero & magnitudine & tempore, de qua poſſit hoc vniuerſale exſiſtẽs demõſtrari. Vniuerſaliter quidem verum eſt, ſi aliqua proportionalia ſint, etiã permutatim proportionalia erunt. Cum autẽ non habeant nomen commune definitũ, quod voci Aliqua ſubſtituant, diſſecant demõſtrationem, & exiſtimant ſe vniuerſaliter demonſtrare de vnoquoq; prædictorum, cum ſic non demonſtrẽt. nõ enim qua numerus, neq; magnitudo, neq; tempus eſt, vtuntur ad demonſtrationem. Vult dicere Themiſtius, non eſſe integram demonſtrationem, ſi quis per partes demonſtret, quod de toto genere reciproce, vt per cauſam vniuerſalẽ demõſtrandum erat: qui igitur hac ratione ſe putant aliquid demonſtrare, plurimum falluntur. Nam diſſectionem quandam ſenſilem, & τεμαχισμὸν introducunt, & perinde faciunt, ac ſi per minutiſſimas diuiſiones ſuperficiẽ circularem quadrare velint: cum omnibus ſit notiſſimum, demonſtrationẽ eſſe generis alicuius definiti & reciproci. Obſeruãdum igitur eſt, omnem epharmoſin rectiſſime appellari τεμαχισμὸν, hoc eſt, cõciſionem & in fruſta diuiſionem: quotieſcunq; enim quantitates per epharmoſin ęquare volumus, diuiſione certarum partium vtimur, & oſtendimus ideo quantitates inter ſe æquales eſſe, quod ſingulæ illarum partes ad ſe inuicem applicari poſſint. Sed huiuſmodi τεμαχισμὸς, ſiue ἐφάρμοσις τεμαχιστικὴ nihil demonſtrat: cum non ſuppeditet cauſam vniuerſalem

& pro-

& proximam,per quam omnem demonſtrationẽ fieri neceſſe. Liquet igitur ex dictis, quid ſit epharmoſis, quãdo & vbi in geometria locũ habeat, & quomodo ad Mechanicos ſit translata.

Monſtratur, quid de proportione recti ad curuum ſentiendum.

CAPVT IX.

VT quæſtionem hãc decidere poſſimus, an curui ad rectum ſit aliqua proportio? primũ in genere quędã de proportione ex lib. 5. Euclidis repetemus, deinde oſtendemus, quomodo per diſtinctionem ad quæſtionem propoſitam ſit reſpondẽdum. Definitionẽ tertiã libri 5. Euclidis ſic explicat Campanus: Proportio eſt duarum, quantæcunq; ſint, eiuſdem generis quantitatum, certa alterius ad alteram habitudo. Proportio eſt habitudo duarum rerum eiuſdem generis ad inuicem, in eo quod earum altera maior aut minor eſt reliqua, vel ſibi æqualis. Non enim ſolum in quantitatibus reperitur proportio, ſed in ponderibus, potẽtiis & ſonis. In ponderibus quidem & potentiis vult Plato in Timæo eſſe proportionem, vbi elementorum numerum oſtendit: in ſonis autem eſſe proportionem liquet ex muſica. Nam vt vult Boetius in quarto, ſi quilibet neruus in duas inæquales partes diuidatur, erit ipſorũ partium ſuorumq; ſonorũ eadem cõuerſo modo propor-

uiditur autem proportio in duas ſpecies, quæ accipiũtur in comparatione ad quantitates. Nam quantitatũ quædam ſunt communicãtes ſiue commenſurabiles: quædam dicuntur incommunicantes ſiue incommẽſurabiles. Communicantes dicuntur illæ, quibus eſt vna quantitas communis eas numerans. Dicitur autem vna quantitas numerare aliam, quæ ſecundum aliquẽ numerum accepta, producit ipſam, vt linea pedalis bipedalem vel tripedalem lineam. Sunt igitur quantitates communicantes, ſicut linea bipedalis & tripedalis, quas pedalis linea ſecundum binarium & ternarium numerat. Quantitates vero, quibus non eſt vna communis quantitas, eas numerans, dicuntur incommenſurabiles, cuiuſmodi ſunt diameter quadrati; & eius latus. Sunt igitur ſecundum hoc duæ proportionũ ſpecies, ſcilicet rationalis & irrationalis: proportio rationalis debetur quãtitatibus cõmunicantibus, ipſa quoque eſt, quæ numeris ſola debetur. Irrationalis autem proportio quãtitatibus incommẽſurabilibus debetur, numeris vero nequaquam competit. Vnde manifeſtũ eſt, quod ad geo metram pertinet proportionis conſideratio: quia omnis proportio eſt magnitudinis, ſed non omnis proportio eſt numeralis. Proportio igitur rationalis denominatur immediate ab aliquo numero: omnium enim quantitatum communicantium oportet quod ſecundum aliquem numerum minor vel aliqua pars minoris maiorem numeret: propter quod

dixit Euclides infra in quinta decimi, omnium duarũ quantitatum communicãtium eſt proportio alterius ad alteram, tanquam proportio numeri ad numerum. Et paulo poſt, Proportio autem irrationalis non nominatur ſic immediate ab aliquo numero, ab alia proportione numerali, quoniam non eſt poſſibile, vt ſecundum aliquem numerum pars aliqua minoris maiorem numeret. Contingit tamen mediate denominari irrationalẽ a numero, vt quod proportio diametri ad coſtã eſt medietas proportionis duplæ: & ita capiũt aliæ ſpecies proportionis huius denominationẽ a numero. Hactenus Paciolus. Ex quibus omnibus perſpicuum eſt, proportionẽ eſſe mutuum reſpectum duarũ quantitatum eiuſdem generis, propter quem reſpectũ vel ambæ quantitates ſunt æquales, vel vna earum minor eſt aut maior altera. Comparãtur aũt illa propriè, quæ eiuſdem ſunt generis & naturæ ſpecificæ: vt linea recta rationalis confertur cum linea recta rationali: ſed attendẽdum eſt, ſi linea recta rationalis conferatur cũ linea recta irrationali, hanc comparationem ęquiuocã eſſe, & dici proportionẽ irrationalem. exempli gratia, inter diametrũ & latus quadrati, eſt determinata proportio, quæ explicari poteſt per lineã medio loco proportionalẽ, vt docet propoſitio nona libri 6. Euclidis. Si igitur latius vſurpemus vocabulum proportionis, vt vult Campanus, & Paciolus, etiã linea recta rationalis poterit comparari cũ linea recta irrationali, non tamẽ immediate

ſcita a nobis, nec etiam a natura. Nam proportio quædam eſt diſcretorum, vt numerorum, quædam autem continuorum. In numeris autem minor eſt pars aut partes maioris, vt demōſtratur in ſeptimo: quare & in eis omnibus eſt habitudo certa & nota. At vero in cōtinuis eſt proportio magis larga: eſt enim in eis, vbi minor quantitas eſt pars aut partes maioris, & talium omnium mediantibus numeris eſt proportio nota, quę & rationalis dicitur. Dicunturq; omnes tales quantitates communicantes, quia eas vna & eadem vnitas neceſſario metitur: vnde & omnes numeri ſunt communicantes, omnes enim ipſos metitur vnitas. Eſt etiā vbi minor non eſt pars aut partes maioris, & in talibus nō eſt nota proportio, nec nobis, nec natura. Diciturque hæc proportio irrationalis, & hæ quantitates ſunt incommunicantes: vnde fit, vt quæcunque proportio reperitur in numeris, reperiatur in omni genere continuorum, vt in lineis, ſuperficiebus, corporib. & temporibus: nō autem econuerſo, infinitæ enim ſunt proportiones in continuis repertæ, quas numerorum natura non ſuſtinet. Sed quæcunque proportio reperitur in vno genere cōtinuorum, eadem reperitur in omnibus aliis. Nam qualitercunq; ſe habet aliqua linea ad quamlibet aliam, ſic ſe habet quælibet ſuperficies ad aliquam aliam, & quodlibet corpus ad aliquod aliud, ſimiliter & tempus: ſed non ſic quilibet numerus ad aliquem alium: vnde magis eſt larga proportio in con-

immediate per certum numerum, ſed per quãtitatem medio loco proportionalẽ, aut per quadrata linearũ, quæ certam inter ſe habent proportionem: ſic dicimus quadratum diametri in figura quadrata duplum eſſe reſpectu quadrati, quod a latere vno deſcribitur. Quomodocunq; autem conſideretur proportio tam rationalis quam irrationalis, primo locũ habet in lineis rectis & figuris rectilineis: deinde propter comparationẽ linearũ rectarum accommodari poteſt ad figuras curuilineas: ſic dicimus duos circulos habere duplam proportionem, quia quadrata diametrorum in his circulis deſcripta, inter ſe duplam habẽt proportionem, vt docet propoſitio ſecunda libri 12. Euclidis. Præterea locũ habet proportio æqualitatis inter figuras diſſimiles rectilineas & curuilineas: nam triangulum poteſt ęquari parallelogrammo altera parte lõgiori, & lunula Hippocratis æqualis eſt alicui triangulo rectangulo: huiuſmodi autem proportio æqualitatis per certam demõſtrationẽ colligitur. Quãdo igitur quæritur, an curui ad rectũ ſit aliqua proportio? reſpondendũ eſt, lineam curuã cũ recta nullã habere proportionẽ, nec rationalẽ nec irrationalem: nam linea recta eſt breuiſſima extẽſio inter duo puncta extrema, ita vt minima portio lineæ rectæ naturã habeat totius, & non immerito portio recta appellari poſſit: curua autem linea, & potiſſimũ circularis, non extenditur breuiſſime & æqualiter inter duo puncta extrema, ac proinde etiam minimũ

punctum a rectitudine declinans, curuum cenſendum eſt. Quod autẽ ad ſuperficies curuilineas & rectilineas attinet, non eſt dubium, quin ſæpenumero in illis poſſit certa proportio declarari: ſic meniſcus Hippocratis proportionem habet æqualitatis cum triãgulo orthogonio iſoſcele, cuius hypotenuſa eſt latus quadrati circulo inſcripti.

Epilogus tractationis de quadratura circuli.

CAPVT X.

HActenus in genere omnia expoſuimus, ex quibus Quadraturam circuli æſtimare licet: non enim fieri poteſt, vt ſpatium circulare exactiſſime æquetur figuræ rectilineæ, ſed nihil impedit, quo minus proxima æquatio inueniatur. Quam ſententiã confirmat Ioannes Regiomontanus, de quadratura circuli aduerſus Nicolaum Cuſanum diſputans, vbi pagina 53 ſic ſcribit: Prope igitur ad metã acceſſit vir ille, quamuis medio frueretur facilimo. nõ tamen idcirco ſatisfecit intellectui, veritatem magis quã propinquitatem inueſtiganti. Nam ſi ad metã ipſam propinquius etiam quam Archimedes veniendi fuerit libido, viam in promtu habemus, ab Archimede ſumtam, qui quẽadmodum proportionem circumferentiæ ad diametrũ concluſit inter duas, ſcilicet triplam ſeſquiſeptimã, & triplam ſuperpartiẽtem decem ſeptuageſimas primas: ita inter duas proportiones multo inter ſe viciniores eandem conſtituere poterimus circumferentiæ ad diametrũ proportionem. Sed in hoc nõ quieſcit animus, cum recta æqualis circumferentiæ circuli non ſit data: atque idcirco ſpes omnis circulum quadrandi ademta. Si qui ergo ſiue modernorũ ſiue poſterorũ huius rei gloriam venari velint, curuæ lineæ recti-

ctificandæ vel circuli quadrandi problema ſibi nouiter obiectum habent, quamuis plurimi quidem vetuſtiſsimi Philoſophi id aggreſsi ſint, nemo autem Archimedem in hoc philoſophandi genere vſque ad hodiernũ diem ſuperauerit. admirãdus profecto eſſet, qui tantum tamque inexplicabile curui & recti diſcrimẽ rumperet: alterumque inalterum commutandi facultatem traderet: is enim maiores noſtros vniuerſos ingenio ſuo, præſertim in Geometricis exercitiis, longe anteuenire crederetur. Hactenus Regiomontanus. Addã hic teſtimoniũ Clariſsimi viri, D Adriani Romani, in Academia Wurtzeburgenſi Profeſſoris medicinæ primarij: qui in Methodo polygonorũ a ſe edita fatetur, ſe diligenter omnium, qui de quadratura circuli ſcripſerunt, doctrinã examinaſſe, erroreſque deprehenſos annotaſſe, ac tandem nõ niſi proximam perimetri ad diametrũ proportionẽ inueniſſe, ex eaque aream circuli, figuræ rectilineæ proxime congruentem, explicaſſe. Quin immo nobis affirmauit, ſe hanc ſentẽtiam concepiſſe, quod a nemine mortaliũ exactiſsima quadratura inueſtigari poſsit, & propterea nugas & impoſturas ſophiſticas eſſe, quibus nõnulli rudioribus perſuadere conẽtur, inter perimetrum & diametrum circuli dari perfectiſsimã & abſolutiſsimam proportionẽ, ex qua circulus omnino ſcientifice quadrari poſsit. Hæc ideo commemoro, vt intelligamus, non deeſſe etiam hoc tempore viros cordatos & prudentes, qui temerariam audaciam ſciolorũ retundere, & veritatẽ ab omnibus iniuriis vindicare queant. Non ita pridem ab amico literas accepi, vbi inter alia hæc ſcribũtur: *Scaliger tuus de quadratura edidit librum ſuum, de quo meum exſpectes iudicium, nolo: ſed Geometriæ tyrones conſule. Si in Chronographia ita ſe geſsit, non miror fuiſſe, qui eum oppugnare ſint auſi.* Quis neſcit palmam in medio poſitam eſſe? ſi æquum eſſe cẽſemus, vt illa publici iuris faciamus, quæ a nobis intra priuatos parietes ſunt exarata.

haud profecto iniquum erit, vt viciſsim aliorum iudicia de ſcriptis noſtris audiamus. Sed conqueruntur auctoritatis & honoris amantes, ſe nimis acerbe ab aliis tractari, in ſententia dicenda de rerum abſtruſarũ & ſubtiliſsimarum inuentione: opinor equidem, acerbitatem ab ipſis vocari, ſi quis libere & candide diſſentiat, & errorum cauſas ſine vllo perſonarum reſpectu manifeſtet: eo enim quadrat vulgare dictũ, OBSEQVIVM AMICOS, VERITAS ODIVM PARIT. Sin vero exiſtiment, ſe verbis durioribus, quam par erat, compellari: agnoſcãt & alios eſſe, quibus diſpliceant mordaces ſermonis aculei. Quare ſi alios modeſte de nobis ſentire volumus, neceſſe eſt, vt nos quoque de ipſis modeſte loquamur: nam vim vi repellere licet. Ad me quod attinet, maluiſſem hiſce laboribus ſuperſedere, niſi faſtu quodam intolerabili Archimedem ab aliis reprehẽdi animaduertiſſem: nec etiã decuit me ſilere, quando Ariſtoteli eiuſque interpretibus falſas ſententias ab hominibus imperitis affingi, & principia demonſtrationis temere labefactari, nec non geometrica cũ mechanicis confundi, ſatis euidenter probare poſſem. Spero autem plures deinceps fore, qui maiore ingenij felicitate, & rerũ ſubliniorũ copia inſtructi, de quadratura circuli ſint diſputaturi: quibus omnibus me gratias immortales acturum profiteor, quod pręclaris ſuis laboribus Rempub. iuuare, & veritatem ab inſidiis maleuolorum calumniatorum fortiter tueri haud ſint dedignati. Ego interea, Deo dante ſecundas curas de emendatione temporum ab aliis diu promiſſas exſpectabo, & ſi quid in iis caſtigatione dignũ reperiatur, omnibus impertiar. Faxit Deus Optimus Maximus, vt otio tranquillo fruamur, & ſaluti tam priuatæ quam publicæ optime conſulamus.

FINIS.